

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÚR ANDRÁS, GERENCSÉR LÁSZLÓ, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

VIZVÁRI BÉLA

TECHNIKAI SZERKESZTŐ

KOVÁCS GERGELY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Miklós, Baran Sándor, Bozóki Sándor, Csáji Balázs Csanád, Csendes Tibor,
Csirik János, Fazekas István, Forgó Ferenc, Frank András, Fridli Sándor,
Friedler Ferenc, Galántai Aurél, Garay Barna, Győri István, Hajdu András, Hartung Ferenc,
Hatvani László, Heppes Aladár, Horváth Zoltán, Illés Tibor, Járai Antal, Jelasity Márk,
Katona Gyula, Király Tamás, Kis Tamás, Krisztin Tibor, Lovász László, Maksa Gyula,
Maros István, Michaletzky György, Pap Gyula, Rásonyi Miklós, Recski András,
Rónyai Lajos, Röst Gergely, Simon Péter, Szabó Péter Gábor, Szeidl László, Tallos Péter,
Temesi József, Tusnády Gábor

36. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

A folyóirat e-mail címe: aml@math.elte.hu

A folyóirat honlapja: <http://aml.math.bme.hu>

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

ELŐSZÓ

A 2017. június 14-16. között Cegléden megrendezett XXXII. Magyar Operáció-kutatási Konferenciához kapcsolódóan az *Alkalmazott Matematikai Lapok* két kötetet jelentetett meg. Az *Alkalmazott Matematikai Lapok* szerkesztőbizottságának vezetői a különszámok gondozására vendégszerkesztőket kértek fel Bozóki Sándor, Fleiner Tamás, Illés Tibor és Tasnádi Attila személyében. Az első kötettel Prékopa András emléke előtt tiszteltünk. A jelenlegi második kötetben az alábbi dolgozatok találhatók:

Ágoston és Bíró egészértékű programozási feladatként vizsgálja a központosított egyetemi felvételik után a hallgatók szakokhoz rendelését. Bár az alapfeladatra hatékonyan működik a jól ismert Gale–Shapley-algoritmus, ez nem képes kezelni számos, a gyakorlatban előforduló megkötést, mint amilyen például a közös kvóták rendszere. A javasolt megközelítés bár jóval számításigényesebb, flexibilitása révén képes az ilyen előírások figyelembevételére is.

Bíró az utóbbi időben sokat kutatott, rendkívül ígéretes vesecseriprogramokat mutatja be, és néhány, ennek kapcsán fellépő matematikai problémát ismertet. A vesecserék lehetősége és az ezekhez alkalmazott központosított programok kiváló példáját adják annak, hogy a matematikai módszerekkel történő optimalizálás esetenként életet menthet.

Király és Mészáros-Karkus a népszerű párosításokat vizsgálja. Népszerű az olyan párosítás, amelynél nincs népszerűbb abban az értelemben, ha két párosításból a népszerűbbet a résztvevők szavazatainak egyszerű többsége határozza meg. Jól ismert, hogy ha a résztvevők preferenciái nem szigorúak, akkor a népszerű párosítás keresése reménytelenül nehéz. A szerzők fő eredménye, hogy erősen népszerű párosítás polinomidőben található akkor is, ha a résztvevők preferenciáiban döntetlenek is lehetnek.

Fleiner és Romsics munkája igazságos osztozkodásokról szól. Két- és többszereplős problémákra mutat be igazságos elosztást eredményező eljárásokat, új eredményük pedig a részvénytársaság felosztási algoritmus, amelyben a két, nem feltétlenül egyforma súlyú játékos osztozkodik a közös jószágban birtokolt részvényein.

Forgó becslést ad a kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok puha korrelált egyensúlyának kényszerítési értékére.

Petróczy, Rogers és Kóczy két nevezetes hatalmi index segítségével vizsgálja az Európai Unió Tanácsában egy, a Brexitet követő újabb tagállamkilépés hatását a bent maradó tagországok, kiváltképp Magyarország befolyásoló képességére.

Radványi áttekintő tanulmányában a kooperatív játékelmélet eszköztárának felhasználásával a fastruktúrájú hálózatokon vizsgálja a költségelosztási problémákat „igazságossági” kritériumok alapján.

Solymosi az ismertebb magkiterjesztések közül tárgyalja az alkuhalmazokat, több fontos játékosztályra ismerteti a mag és az alkuhalmazok közötti viszonyt, és megfogalmaz egy tucat nyitott kérdést.

Csató cikkének fő eredménye a többszemponútú döntéshozatalban sokat használt logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével generált rangsorok axiomatikus karakterizációja. Ennek kapcsán a szerző karakterizálja a súlyozási módszereket, és ezeknek, illetve a rangsorolási módszereknek különféle tulajdonságaira mutat rá.

Dobos az ökológiai lábnyom, a nemzetgazdaságok földterület felhasználásának kiszámításához használja a Leontieff-féle input-output modellt, korrigálva az irodalomban található megközelítések pontatlanságait.

Nagy és Szakál a Hu-invariáns momentumok segítségével egy új körszerűségi mutatót alkalmaz néhány amerikai választókerület alakjának és az újrarájzolások hatásának vizsgálatára.

Bozóki Sándor
Fleiner Tamás
Illés Tibor
Tasnádi Attila

Az Alkalmazott Matematika Lapok szerkesztősége ezúton is köszöni Bozóki Sándornak, Fleiner Tamásnak, Illés Tibornak és Tasnádi Attilának, hogy e különszám vendég szerkesztőiként segítettek a szám elkészültében.

A vendég szerkesztők rövid életrajzai az előző kötetben olvashatóak.

EGÉSZÉRTÉKŰ PROGRAMOZÁS HASZNÁLATA KÖZÖS KVÓTÁS EGYETEMI FELVÉTELI FELADATOKRA

ÁGOSTON KOLOS CSABA, BIRÓ PÉTER

Felvételi feladatok elemzése a matematikai, közgazdasági és számítástudományi szakirodalomban egyaránt prosperáló területté vált az elmúlt 55 évben. Ezeket a kétoldali párosítási feladatokat jellemzően az ún. Gale-Shapley (késleltetett elfogadási) algoritmussal, vagy annak valamely továbbfejlesztett változatával oldják meg. Ebben a cikkben alternatívát adunk: a felvételi feladatokat egészértékű programozási feladatként (IP) kezeljük. Arra a speciális esetre adunk meg három különböző IP-modellt, amikor az egyetemekre (vagy a magyar alkalmazásban a szakokra) közös felső kvóta vonatkoznak. Ez alapvetően egy NP-nehéz feladat, de az általunk bemutatott IP-modellel a szimulációink szerint nagyméretű feladatok is megoldhatóak.

1. Bevezetés

A felsőoktatási jelentkezéseket a világ több országában központosított rendszerek kezelik [5]. Ezekben a rendszerekben a diákok jelentkezéskor sorrendet állítanak fel azon képzések között, amelyeken el tudják képzelni továbbtanulásukat. A jelentkezőket az egyetemek a felvételi pontszám alapján rangsorolják, amely jellemzően a középiskolai érdemjegyeken és a felvételi vizsgán elért eredményen alapul. A szakok esetén a kvóta meghatározza a maximális felvehető létszámot. A feladat az, hogy megadjunk egy hozzárendelést a jelentkezők és a képzések között, azaz megadjuk, hogy melyik diák melyik szakon fog továbbtanulni.

A felvételi feladatok megoldásában mérőföldkő Gale és Shapley [10] által javasolt késleltetett elfogadási algoritmus, amely a jelentkezések számával arányosan növvő futásidőben (lineáris időben) megad egy ún. *stabil megoldást*. A megoldás akkor stabil, ha nem létezik ún. *blokkoló pár*; azaz semelyik diákot sem lehet a preferencia listájában egy jobb helyre felvenni, ugyanis ott már telítve van a kvóta nálánál jobb diákokkal.

Konkrét felsőoktatási rendszerekben előfordulnak olyan specialitások, amelyek megnehezítik (vagy lehetetlenné teszik) a Gale-Shapley-algoritmus alkalmazását.

Ilyen specialitás a holtversenyek kezelése: könnyen elképzelhető, hogy kettő (vagy több) diák azonos pontot ér el egy adott szakon. Ha ez a pontszám pont a

„határon” van, akkor mindegyikük felvételével túllépnénk a kvótát. Ilyen esetben többféle megoldás is elképzelhető: a) valamilyen módon felbontják a holtversenyt, azaz meghatároznak egy mesterséges sorrendet a jelentkezők között, mondjuk véletlen szám generálásával (ahogy Írországban teszik), vagy demográfiai változók segítségével (pl. a török rendszerben); b) egyenlő bánásmódot alkalmaznak, mint például Magyarországon vagy Chilében. Ez utóbbi esetben az azonos pontszámú diákokat egyformán kell kezelni: mindenkit fel kell venni, vagy mindenkit vissza kell utasítani. Magyarországon a kvóta nem sérülhet, tehát itt könnyen előfordulhat, hogy egy képzés nem lesz tele, még ha lennének is hallgatók, akik szeretnének ott továbbtanulni. Chilében a döntés a diákoknak kedvez: az utolsó csoportot még akkor is felveszik, ha velük már túlszordul a kvóta. Holtversenyek esetén módosított Gale–Shapley-algoritmust tudunk használni, amely hatékonyan megoldja a problémát, bár az eljárás néhány jó tulajdonsága sérül, pl. az igazmondásra ösztönzés (bővebben lásd [1], [7] és [9]).

Magyarországon egy másik specialitás az alsó kvóták használata, amellyel gazdaságos méretű képzések indítását érhetjük el. Egy szak csak akkor indul, ha legalább minimális létszámú diákot oda tudunk rendelni. Az alsó kvóták használata esetén a stabil megoldás létezése nem garantált, és a feladat NP-nehéz [6]. Ügyes heurisztikákkal és egészértékű programozási módszerrel azonban kezelhető a probléma [2].

Egy újabb specialitás az ún. közös kvóta, amellyel ebben az írásban foglalkozunk. Magyarországon sok képzés esetén van államilag támogatott és önköltséges finanszírozási forma is. Az egyetemek 2008 óta szakonként egy keretszámmal adják meg a hozzájuk felvehető diákok maximális létszámát, ezen túlmenően rendszerszinten számukra közömbös a finanszírozási forma (azaz, nem osztják meg a kvótát). A kormányzat oktatáspolitikai megfontolások miatt szakonként szab keretet az államilag finanszírozott helyekre (de csak ezekre, a költségtérítéssel helyekre nem), és ezt a keretszámot nem osztja szét az egyetemek között. Erre a feladatra nem mindig adható stabil megoldás, és a probléma NP-nehéz [6]. Jelen cikkben három IP-modellt adunk meg a közös kvótás feladatra; és bár mindhárom ugyanazt a párosítást adja, futási időben jelentős a különbség.

IP-feladatok használata felvételi feladatok (vagy egyéb kétoldali stabil párosítási feladatok) esetén egy új irány a szakirodalomban. Az eddigi mellőzöttségnek részben az az oka, hogy a gyakorlatban nagyok a feladatok és a Gale–Shapley-típusú heurisztikák elég jól működnek. Az egészértékű programozás újkeletű vizsgálatát viszont az indokolja, hogy a konkrét alkalmazások során egyre több a specialitás, amelyek sokszor NP-nehézzé teszik a problémát. Emellett a szofisztikált szolverek és az erős gépek egyre nagyobb feladatok megoldását teszik lehetővé egészértékű programozási technikával. Továbbá ez a módszer robusztus, vagyis könnyen bővíthető új feltételekkel, illetve a döntéshozók szempontjai megjeleníthetők a célfüggvényekben. A következő szakirodalmi forrásokat ajánljuk az érdeklőknek a témakörben: [2], [3], [8], [11], [12].

2. Egészértékű programozási feladat

2.1. Jelölések

Jelölje A a jelentkezők halmazát, amelynek elemei: $a_i \in A$, és C a szakok halmazát, amelynek elemei: $c_j \in C$. Legyen r_{ij} a j szak rangsorszáma i jelentkező esetén, s_{ij} pedig az i jelentkező felvételi pontszáma j szak esetén. Egy diáknak eltérhet a pontszáma szakonként: pl. közgazdasági képzés esetén az angol nyelvvizsgáért jár pluszpont, angol szak esetén nem; illetve közgazdász szakra a történelem jegyek számítanak, míg informatikus szakra a fizika. Cikkünk további részében feltesszük, hogy semelyik két diáknak nem egyezik meg a pontszáma egyik szakon sem (ez a helyzet például Írországbán, ahol sorsolással bontják fel a holtversenyeket, diákonként különböző kis véletlen számot adva a pontszámokhoz). A képzések esetén u_j jelöli a (felső) kvótát, ennél több diákot nem lehet felvenni az adott szakra. A jelentkezők halmazát E jelöli, ahol $E \subseteq A \times C$.

2.2. Alap felvételi feladat

A jelentkezők egy halmazát *párosításnak* nevezzük, ha minden jelentkező csak maximum egy szakra kerül felvételre, és minden szak esetén a felvett diákok száma legfeljebb annyi, mint a kvóta. Egy párosítás *stabil*, ha minden nem kiválasztott (a_i, c_j) esetén vagy a_i diák fel lett véve egy számára kedvezőbb helyre, vagy c_j szakon a kvóta telítve van a_i -nél jobb jelentkezőkkel. Felvételi feladatok esetén a legismertebb LP-modell Baïou és Balinski ([4]) nevéhez fűződik.

$$\sum_{j:(a_i, c_j) \in E} x_{ij} \leq 1 \quad \forall a_i \in A, \quad (1)$$

$$\sum_{i:(a_i, c_j) \in E} x_{ij} \leq u_j \quad \forall c_j \in C, \quad (2)$$

$$\left(\sum_{k:r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik} \right) u_j + \sum_{h:(a_h, c_j) \in E, s_{hj} > s_{ij}} x_{hj} \geq u_j \quad \forall (a_i, c_j) \in E, \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (a_i, c_j) \in E.$$

Az (1) és (2) korlátok ún. *megvalósíthatósági korlátok*: (1) korlát biztosítja, hogy egy diákot csak maximum egy helyre lehet felvenni, (2) pedig azt, hogy egy szakra maximum u_j diákot lehet felvenni. A (3) korlát az ún. *stabilitási korlát*. Minden jelentkezés esetén van egy ilyen stabilitási korlát. Ha az a_i jelentkezőt felvették a c_j szakra, vagy egy ennél preferáltabb szakra, akkor $(\sum_{k:r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik})u_j$ tag legalább u_j , tehát a stabilitási korlát teljesül. Ha a_i jelentkezőt nem vették fel sem erre a szakra, sem egy ennél számára kedvezőbb szakra, akkor a $(\sum_{k:r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik})u_j$

kifejezés 0, ebből következően a $\sum_{h:(a_h, c_j) \in E, s_{hj} > s_{ij}} x_{hj}$ kifejezés legalább u_j , tehát van kvótányi diák, akiket felvettek a c_j szakra, és több pontjuk van, mint a_i -nek.

Közös kvóták esetén szakhalmazokra adhatunk meg felső korlátot. Ha $C_p \subseteq C$ egy szakhalmaz, akkor jelölje u_p a rá vonatkozó közös kvótát. A párosítás megengedett, ha ezeket a közös kvótákat is teljesíti. Közös kvótákat csak olyan szakokra van értelme meghatározni, ahol a diákoknak ugyanannyi pontjuk van a közös kvóta minden szakja esetén. A megoldás stabilitása úgy módosul, hogy ha egy (a_i, c_j) jelentkezés nincs benne a párosításban, akkor a korábbi két indokon kívül egy harmadik oka is lehet, mégpedig, hogy c_j benne van egy olyan C_p szakhalmazban, aminek az u_p közös kvótája a_i -nél magasabb pontszámú diákokkal lett feltöltve.

Az egyetemi felvételi közös kvótás változatát Biró és szerzőtársai definiálták és vizsgálták meg először [6]. Megmutatták, hogy ha *egymásba ágyazottak* a közös kvótával rendelkező szakhalmazok (vagyis ha bármely C_p és C_q szakhalmazokban van egy közös szak, akkor vagy $C_p \subset C_q$, vagy $C_p \supset C_q$ fennáll), akkor a Gale–Shapley-algoritmus általánosított változataival mindig hatékonyan található stabil megoldás. Ha viszont ez a tulajdonság nem áll fenn a szakhalmazok rendszerére, akkor nem garantált a stabil párosítás létezése, és a feladat NP-nehéz. Sajnálatos módon a hazai rendszer egymásba ágyazottsága egy kormányzati döntés után megszűnt 2008-ban, vagyis a hazai feladat nem mindig megoldható, és NP-nehéz.

Az egészértékű programozási feladatot tekintve, amennyiben közös kvóták vannak, úgy (1) korlátot kicseréljük a

$$\sum_{(a_i, c_j) \in E; c_j \in C_p} x_{ij} \leq u_p \quad \forall C_p \subseteq C \quad (4)$$

korlátra, tehát van a szakoknak egy részhalmaza (C_p), amely szakokon tanuló diákok összes száma nem lehet több, mint u_p . Az egyszerűség kedvéért az egyedi korlátokat is (ha vannak) közös kvótaként fogalmazzuk meg. Ebben az esetben C_p részhalmaz csak egy szakot tartalmaz.

Közös kvóták esetén egy diákot csak akkor lehet hozzárendelni egy szakhoz, ha belefér az összes kvótába. Pl.: c_1 szak esetén a kvóta 20, c_1 és c_2 szak együttesére a közös kvóta 10. Ekkor c_1 szakhoz biztosan nem fogunk tudni hozzárendelni 20 diákot, még akkor sem, ha lenne 20 diák, aki szeretne itt tanulni. Tehát közös kvóták esetén nem biztosítható a (3) stabilitási korlát teljesülése, módosítanunk kell ezen korláton:

$$\left(\sum_{k: r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik} \right) u_p + \sum_{\substack{(a_h, c_k) \in E: \\ c_k \in C_p, s_{hk} > s_{ij}}} x_{hk} + u_p(1 - b_{pj}) \geq u_p \quad (5)$$

$$\forall C_p, (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p$$

Látható, hogy ha a b_{pj} bináris segédváltozó 0, akkor az (5) stabilitási korlát teljesül. Minden szak esetén legalább egy kvótára teljesülnie kell a stabilitási korlátnak az eredeti formájában is, azaz:

$$\sum_{p:c_j \in C_p} b_{pj} \geq 1 \quad \forall c_j \in C_p. \quad (6)$$

Tehát stabil megoldást kapunk, ha egy tetszőleges célfüggvényt maximalizálunk az (1), (4), (5) és (6) korlátok mellett. Minden döntési változó (x és b változók) bináris. Nevezzük ezt a modellt AFFF-nek (alap felvételi feladat felírás). Fontos hangsúlyozni, hogy ezen modell esetén a nemnulla elemek száma kvadratikusan nő a jelentkezők számával.

2.3. Stabil felvételi feladat ponthatárokkal

Az egyetemi felvételi feladat (közös kvóták esetén is) leírható a pontszámhatárokkal. Minden kvótahoz meghatározunk egy felvételi pontszámot. Egy diák felvehető egy szakra, ha a szakot tartalmazó összes kvóta pontszámát eléri vagy meghaladja. A ponthatárok alapján természetes módon generálhatunk egy párosítást: minden diákat felvesszük a preferencia listájában az első olyan szakra, ahol a szakhoz tartozó összes ponthatárt eléri vagy meghaladja.

Ponthatárok által megadott párosítás akkor lehetséges, ha egyik kvóta sem sérül. Egy ilyen lehetséges allokációt *irigységmentes* allokációnak (envy-free allocation) hív a szakirodalom (lásd pl.: [13]). Kérdés, hogy egy lehetséges ponthatárvektor mikor fog stabil allokációt eredményezni. Egy irigységmentes allokáció esetén a rendszerben lehet „pazarlás”. Pazarlás alatt azt értjük, hogy egy diákot elutasítanak egy olyan szakról, ahova ha felvennénk, semmilyen feltétel sem sérülne. Erre a pazarlásra a legegyszerűbb példa, ha kellően magasra állítjuk be a ponthatárokat: ekkor egy diák sem kerül be egyetlen szakra sem. Tehát a stabilitáshoz azt kell elérni, hogy ne legyen pazarlás egy irigységmentes párosításban.

Első megközelítés az lehetne, hogy egy ponthatárvektor akkor lesz stabil, ha bármelyik ponthatárt is csökkentjük, akkor valamelyik kvóta túltelítődik. Ez a klasszikus egyetemi felvételi problémára működik, de sajnos közös kvóták esetén nem vezet eredményre. Közös kvóták esetén ugyanis elképzelhető, hogy nincs stabil allokáció, pedig ebben az esetben is meg tudunk adni ponthatárokat, hogy ha bármelyik ponthatárt csökkentjük, akkor szükségképpen túltelítődik egy kvóta. Ilyen ponthatároknak az lesz a tulajdonságuk, hogy ha bizonyos ponthatárok csökkenése esetén túltelítődik egy kvóta, akkor az nem feltétlenül a sajátjuk. Azt kell elérni, hogy bármelyik ponthatár csökkentésével a saját kvótájuk telítődjön túl. Ez a megközelítés oda vezet, hogy a nem telített kvóták esetén le tudjuk vinni a ponthatárt 0-ig. Tehát egy ponthatár együttes stabil elosztást eredményez, ha az elosztás lehetséges, és nem telített kvóták esetén a ponthatár 0 (bővebben lásd [2]).

A közös kvótás egészértékű programozási modellt most pontszámok segítségével írjuk le: jelölje t_p a C_p kvóta esetén a felvételi ponthatárt. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a pontszámok csak egész értékek lehetnek, t_p változó is egészértékű döntési változó lesz.

Először egy irigységmentes hozzárendelést adunk meg alkalmas korlátokkal. Az x_{ij} változó ugyanazt jelenti, mint korábban, és szükségünk van az (1) és (4) korlátokra. A stabilitási korlátok helyett más korlátaink lesznek. Nézzük először a klasszikus esetet, amikor nincsenek közös kvóták, csak a szakokra vannak egyedi kvóták. Jelölje \bar{s} a lehetséges legnagyobb pontszámot. Ekkor:

$$t_j \leq (1 - x_{ij}) \cdot (\bar{s} + 1) + s_{ij} \quad \forall (a_i, c_j) \in E, \quad (7)$$

és

$$s_{ij} + 1 \leq t_j + \left(\sum_{k:r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik} \right) \cdot (\bar{s} + 1) \quad \forall (a_i, c_j) \in E \quad (8)$$

korlátok megteremtik a kapcsolatot a ponthatárok és a párosítás között, vagyis megadnak egy irigységmentes hozzárendelést. A (7) korlát semmitmondó, ha $x_{ij} = 0$. Ha $x_{ij} = 1$ (tehát az a_i jelentkezőt felveszik a c_j szakra), akkor viszont a korlát előírja, hogy a c_j szak esetén a ponthatár nem lehet nagyobb, mint amennyi pontja van az a_i diáknak. Nézzük a (8) korlátot. Amennyiben egy jelentkezés esetén a $\sum_{k:r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik}$ összeg 1 (tehát az a_i jelentkezőt felvették vagy a j szakra, vagy egy ennél preferáltabb szakra), akkor a korlát semmitmondó megint. Ellenben ha a $\sum_{k:r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik}$ összeg 0 (tehát az a_i jelentkezőt nem vették fel sem a c_j szakra, sem egy ennél preferáltabb szakra), akkor a korlát előírja, hogy a c_j szak esetén a ponthatár nagyobb, mint amennyi pontja az a_i jelentkezőnek van.

Nézzük, hogyan változnak a korlátok közös kvótás modell esetén. Ekkor a ponthatárok nem a szakokhoz tartoznak, hanem a (közös) kvótákhoz, és egy diákot csak akkor lehet felvenni egy szakra, ha a hozzá tartozó összes kvótára felveszik. A (7) korlát

$$t_p \leq (1 - x_{ij}) \cdot (\bar{s} + 1) + s_{ij} \quad \forall (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p \quad (9)$$

alakra módosul, a (8) korlátot pedig helyettesítjük a

$$s_{ij} + 1 \leq t_p + \left(\sum_{k:r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik} + (1 - b_{pj}) \right) \cdot (\bar{s} + 1) \quad \forall (a_i, c_j) \in E, c_j \in C_p \quad (10)$$

korláttal, és természetesen most is szükségünk van a (6) korlátra.

A (10) és (6) korlátok együttesen biztosítják, hogy ha valakit nem vesznek fel egy adott szakra, akkor van egy olyan kvóta, ahol a ponthatár nagyobb, mint amennyi pontja az a_i diáknak van.

Ha azt szeretnénk elérni, hogy az eredményül adódó irigységmentes párosítás stabil is legyen, akkor elő kell írni, hogy a nem telített szakok esetén a ponthatár 0. Ennek biztosítására bevezetünk egy f_p bináris változót, ami azt fogja mutatni, hogy a C_p kvóta telített-e.

$$f_p \cdot u_p \leq \sum_{(a_i, c_j) \in E: c_j \in C_p} x_{ij} \quad \forall C_p \subseteq C, \quad (11)$$

és

$$t_p \leq f_p(\bar{s} + 1) \quad \forall C_p \subseteq C. \quad (12)$$

Összességében egy tetszőleges célfüggvényt maximalizálunk az (1), (4), (9), (10), (6), (11) és (12) korlátok mellett. Az x_{ij} , b_{pj} és f_p döntési változók binárisak, a t_p döntési változók pedig egészértékűek. Nevezzük ezt a modellt SFPF-nek (stabil felvételi ponthatárok felírás). Lehet látni, hogy az AFFF-modellhez képest több a döntési változó. Viszont a nemnulla elemek száma csak lineárisan növekszik a jelentkezők számával. Mivel az SFPF-modell vegyes egészértékű feladat, ezért numerikus szempontból nem feltétlenül a legjobb (akár nagyon hosszú futási idővel is szembesülhetünk).

2.4. Stabil felvételi feladat bináris ponthatárokkal

Lehetséges azonban tiszta bináris modellé átformálni az SFPF felírást. Ekkor a ponthatárokat bináris változókká alakítjuk. Szerencsére a ponthatárok csak ténylegesen előforduló pontok lehetnek, ezért nem szükséges minden lehetséges pontszámhoz bináris változót bevezetni. Tekintsünk egy $(a_i, c_j) \in E$ jelentkezőt, vagyis az a_i diák jelentkezését a c_j szakra. Ekkor az összes C_p kvóta esetén, ami tartalmazza a c_j szakot, bevezetünk egy t_{pi} bináris változót. Ezen változó 1 értéke azt jelenti, hogy a C_p kvóta esetén a ponthatár s_{ij} , vagy ennél alacsonyabb (tehát az a_i diákot a C_p kvótába felvehetjük). A t_{pi} változó 0 értéke azt jelenti, hogy a C_p kvótába s_{ij} pontnál kevesebbel nem lehet bekerülni (s_{ij} ponttal nem eldöntött, hogy egy diák bekerül-e vagy sem). Nézzünk tehát ezt a konkrét (a_i, c_j) jelentkezőt. Az a_i diákot fel kell venni a c_j szakra, vagy egy ennél preferáltabb szakra, ha minden, a szakhoz tartozó kvóta ponthatárát eléri. Ekkor:

$$\sum_{k: r_{ik} \leq r_{ij}} x_{ik} \geq \sum_{p: c_j \in C_p} t_{pi} - (q_j - 1) \quad \forall (a_i, c_j) \in E, \quad (13)$$

ahol q_j jelöli azon kvóták számát, ami tartalmazza a j szakot.

Ha egy diákot nem veszünk fel egy kvótába, akkor nála rosszabbat sem vehetünk fel ide. Ezt a relációt viszont nem írjuk fel az összes viszonylatban, csak a pontszámok tekintetében a soron következő esetén:

$$x_{ij} \leq t_{pi'} \quad \forall (a_i, c_j), (a_{i'}, c_{j'}) \in E; c_j, c_{j'} \in C_p; n(p, s_{ij}) = s_{i'j'}, \quad (14)$$

ahol $n(p, s_{ij})$ megadja a C_p kvóta esetén a rangsorban s_{ij} pontszám után következő (magasabb) pontszámot.

Szükségünk van még a ponthatárok közötti koherenciára:

$$t_{pi} \leq t_{pi'} \quad \forall (a_i, c_j), (a_{i'}, c_{j'}) \in E; c_j, c_{j'} \in C_p; n(p, s_{ij}) = s_{i'j'}. \quad (15)$$

Eljutottunk megint egy irigységmentes hozzárendeléshez. Ha azt akarjuk, hogy a párosítás stabil legyen, akkor elő kell megint írni, hogy egy adott kvóta vagy tele van, vagy 0 a ponthatár. A 0 ponthatár azt is jelenti, hogy mindenkit felvettünk az adott szakra, aki ott szeretett volna tanulni:

$$u_p - u_p t_{pi} \leq \sum_{(a_i, c_j) \in E: c_j \in C_p} x_{ij} \quad \forall C_p \subseteq C; a_i : a_i = m(p), \quad (16)$$

ahol $m(p)$ megadja azt a jelentkezőt, akinek legkisebb a felvételi pontszáma a C_p kvóta esetén.

Maximalizálunk egy tetszőleges célfüggvényt az (1), (4), (13), (14), (15) és (16) korlátok mellett. Ez a modell az SBFPF (stabil bináris felvételi ponthatárok felírás), ezen megközelítés esetén minden döntési változó (x_{ij} és t_{pi}) bináris. Most is lineáris a viszony a jelentkezők száma és a nemnulla elemek között. További fontos megjegyzés, hogy a t_{pi} változó esetén nem kell egészértékűségi kikötés, csak a legalsó pontszámok esetén. Ha a legmagasabb pontszámokhoz tartozó t_{pi} változókhoz előírjuk, hogy értékük 1-nél nem lehet nagyobb, akkor a többi t_{pi} változó esetén a $t_{pi} \leq 1$ kikötéseket is el lehet hagyni.

Numerikus vizsgálatok során azt tapasztaltuk, hogy az SBFPF-modell segítségével viszonylag nagyméretű feladatokat is meg lehet oldani. Generált adatokon 300 000 jelentkezőt tartalmazó mintát is meg tudtunk oldani, kb. ennyi jelentkezés van (évente) a magyar felsőoktatási jelentkezési rendszerben (nem közös kvótás modellekhez numerikus eredmények elérhetőek [1]-ben és [2]-ben; a közös kvótás modellek tesztelésén jelenleg is dolgozunk, amelynek eredményét egy későbbi tanulmányban fogjuk ismertetni). Az eredmény azért is különösen hangsúlyos, mert a közös kvótás modell NP-nehéz feladat, ezért hatékony algoritmus létezése gyakorlatilag kizárt ebben az esetben. Természetesen nem biztos, hogy tetszőleges minta esetén ilyen kedvezőek a futási eredmények, de úgy tűnik, hogy az alkalmazásokban előforduló minták esetén az SBFPF-modell hatékony módszer az egzakt megoldás kiszámítására.

3. Összefoglalás

A cikkben ismertettük a felvételi feladatot. Felvételi feladatokat jellemzően az ún. Gale–Shapley-algoritmussal szokás megoldani. A ténylegesen megvalósuló felvételi rendszerekben számos specialitás van, ami lehetetlenné teszi a Gale–Shapley-algoritmus használatát. Az egyik ilyen specialitás a közös kvóták jelenléte.

A cikkben bemutatásra került három különböző egyészértékű programozási feladat a közös kvóták esetére. Az ún. stabil bináris felvételi ponthatárok modell segítségével generált mintákon meg tudtunk oldani akkora méretű feladatokat, mint amilyen nagy a magyar felsőoktatási rendszer. Ráadásul ezen modellek robusztusak, tovább bővíthetőek lineáris korlátok hozzáadásával, illetve a célfüggvényük is szabadon választható, ami a további előnyöket jelent a Gale–Shapley-algoritmuson alapuló heurisztikákkal szemben.

Köszönetnyilvánítás

Biró Péter kutatását az MTA Lendület Programja (LP2016-3/2017), az MTA Kiválósági Együtműködési Programja (KEP-6/2018) és az NKFIH (OTKA) K128611 programja támogatta.

Ágoston Kolos Csaba kutatását az MTA Kiválósági Együtműködési Programja (KEP-6/2018) támogatta.

Hivatkozások

- [1] ÁGOSTON, K. C. AND BIRÓ, P.: *Modelling Preference Ties and Equal Treatment Policy*, In Proceedings of ECMS 2017: 31st European Conference on Modelling and Simulation, pp. 516-522.
- [2] ÁGOSTON, K. C., BIRÓ, P., AND MCBRIDE, I.: *Integer programming methods for special college admissions problems*, Journal of Combinatorial Optimization, Vol. **32** No. **4**, pp. 1371-1399 (2016).
- [3] ÁGOSTON, K. C., BIRÓ, P., AND SZÁNTÓ, R.: *Stable project allocation under distributional constraints*, In Proceedings of the 10th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and its Applications, pp. 43-52.
- [4] BAÏOU, M. AND BALINSKI, M.: *The stable admissions polytope*, Mathematical Programming, Vol. **87** No. **3**, pp. 427-439 (2000).
- [5] BIRÓ, P.: *Applications of Matching Models under Preferences*, Trends in Computational Social Choice, chapter **18**, pp. 345-373 AI Access, (2017).
- [6] BIRÓ, P., FLEINER, T., IRVING, R. W., AND MANLOVE, D. F.: *The College Admissions problem with lower and common quotas*, Theoretical Computer Science, Vol. **411**, pp. 3136-3153 (2010).
- [7] BIRÓ, P. AND KISELGOF, S.: *College admissions with stable score-limits*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **23** No. **4**, pp. 727-741 (2015).
- [8] BIRÓ, P., MANLOVE, D. F., AND MCBRIDE, I.: *The hospitals/residents problem with couples: Complexity and integer programming models*, in: *International Symposium on Experimental Algorithms*, Springer, pp. 10-21, (2014).
- [9] FLEINER, T. AND JANKÓ, Z.: *Choice Function-Based Two-Sided Markets: Stability, Lattice Property, Path Independence and Algorithms*, Algorithms, Vol. **7** No. **1**, pp. 32-59 (2014).
- [10] GALE, D. AND SHAPLEY, L. S.: *College Admissions and the Stability of Marriage*, American Mathematical Monthly, Vol. **69** No. **1**, pp. 9-15 (1962).
- [11] KWANASHIE, A. AND MANLOVE, D. F.: *An integer programming approach to the hospitals/residents problem with ties*, in: *Operations Research Proceedings 2013*, Springer, pp. 263-269 (2014).
- [12] VANDE VATE, J. H.: *Linear programming brings marital bliss*, Operations Research Letters, Vol. **8** No. **3**, pp. 147-153 (1989).
- [13] WU, Q. AND ROTH, A. E.: *The lattice of envy-free matchings*, mimeo.

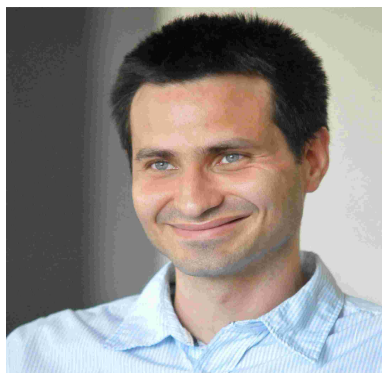


Ágoston Kolos Csaba 1973-ban született Oroszán. A szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium speciális matematika tagozatán tanult, itt is érettségizett 1992-ben. Diplomát a Budapesti Corvinus Egyetem jogelődjén kapott. 2006-ban védte meg a doktori értekezését szintén a Budapesti Corvinus Egyetemen. A doktori cím megszerzése után az egyetemen maradt, itt oktatott és kutatott. Kutatói területe eleinte a biztosítási piacok közgazdasági modellezése volt (ideértve a nyugdíjrendszereket is), mosta-

nában inkább az operációkutatás, azon belül is az LP-modellezés. 40 tudományos közlemény szerzője. 2008-ban Bod Péter-emlékdíjjal tüntették ki. Gyakorló katolikus, 4 gyermek édesapja.

ÁGOSTON KOLOS CSABA

Budapesti Corvinus Egyetem
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 8.
Magyar Tudományos Akadémia
Közgazdaságtudományi Intézet
1097 Budapest, Tóth Kálmán u. 4.
kolos.agoston@uni-corvinus.hu



Bíró Péter matematikusként végzett a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen (2003), majd ugyanitt lett a matematika és számítástudományok doktora (2007). Ezzel egyidejűleg közgazdaságtant tanult a Budapesti Corvinus Egyetemen, ahol az EU szakirányt végezte el (2007). Kutatási területe a kooperatív játékelmélet, algoritmikus mechanizmus-tervezés, és ezeken belül is a párosítások elmélete. 2007-től három és fél éven keresztül volt a University of Glasgow kutatója, majd 2010 októberében csatlakozott a Közgazdaságtudományi Intézet játékelméleti kutatócsoportjához. 2014-ben egy évet Stanfordban töltött vendégprofesszorként, Al Roth meghívására. 2016. július 1-én indult a Lendület Program által támogatott Piactervezés kutatócsoportja. Az elméleti kutatások mellett gyakorlati alkalmazásokban is közreműködött, így például az Egyesült Királyság vesecseré-programjában, a skóciai rezidensek allokációs programjában, vagy a magyar felsőoktatási felvételi rendszer pontszámítási eljárásában. Ezekről és további alkalmazásokról bővebb információ az általa szerkesztett online gyűjteményben található. További információkat a kutatói weblapján érhetők el.

nyí Intézet játékelméleti kutatócsoportjához. 2014-ben egy évet Stanfordban töltött vendégprofesszorként, Al Roth meghívására. 2016. július 1-én indult a Lendület Program által támogatott Piactervezés kutatócsoportja. Az elméleti kutatások mellett gyakorlati alkalmazásokban is közreműködött, így például az Egyesült Királyság vesecseré-programjában, a skóciai rezidensek allokációs programjában, vagy a magyar felsőoktatási felvételi rendszer pontszámítási eljárásában. Ezekről és további alkalmazásokról bővebb információ az általa szerkesztett online gyűjteményben található. További információkat a kutatói weblapján érhetők el.

BIRÓ PÉTER

Magyar Tudományos Akadémia
Közgazdaságtudományi Intézet
1112 Budapest, Budaörsi út 45.
Budapesti Corvinus Egyetem
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
1097 Budapest, Tóth Kálman u. 4.
peter.biro@krtk.mta.hu

INTEGER PROGRAMMING TECHNIQUES FOR COLLEGE
ADMISSION PROBLEM WITH COMMON QUOTAS

KOLOS CSABA ÁGOSTON AND PÉTER BIRÓ

College admission problems have been intensively studied in the past 55 years in the mathematics, economics and computer science literatures. The standard method for solving these two-sided matching problems is by the deferred-acceptance algorithm of Gale and Shapley, or by its variants. In this paper we study the alternative method of integer programming (IP). We give three different IP formulations for the special case of college admission problems, where the common upper quotas are present. This is an NP-hard problem, but our simulations show that one of our formulations can be solved for large instances as well.

Keywords: college admissions, stable matching, integer programming, common quotas.

Mathematics Subject Classification (2000): 90C10, 91B68, 05C70.

VESECSEREPROGRAMOK MATEMATIKÁJA

BIRÓ PÉTER

Amennyiben egy vesebetegnek van egy lehetséges élődonorja, de az immunológiai szempontból nem kompatibilis vele, akkor több országban lehetősége van arra, hogy szervezett keretek közt elcserélje a donorját egy számára kompatibilis donorra. A cseréket központilag koordináló párosító alkalmazásokat közgazdászok, számítástudósok és transzplantációs szakemberek egyaránt szervezik és kutatják. Ebben a dolgozatban rövid áttekintést adunk a mögöttes gráfelméleti problémáról és annak megoldási lehetőségeiről egészértékű programozással.

1. Bevezetés

Központilag koordinált párosító programok az élet sok területén kerültek már bevezetésre, diákok allokálása iskolákhoz, egyetemi felvételi, gyakornokok allokálása, tantárgyválasztás, cikkek allokálása bírálókhöz, hogy csak néhány példát említsünk (egy részletes összefoglaló az alkalmazásokról: [5]). A vesebetegek és potenciális élődonorok szervezett egymáshoz párosítása egy új típusú alkalmazás, ami az elmúlt két évtizedben világszerte elterjedt.

A krónikus vesebetegség hagyományos kezelése a dialízis, ami rossz életminőséget és kedvezőtlen életkilátásokat biztosít a betegnek (nagyjából 10 éves, folyamatosan romló életkilátással), ezért az orvostudomány jelenlegi állása szerint a transzplantáció az egyetlen reális gyógyítási lehetőség. Halott donorból kevés van, például az USA-ban 300 000 ember áll dialízises kezelés alatt, amiből 100 000 van rajta a várólistán, de évente csak nagyjából 12 000 halott donor van, ezért az átlagos várakozási idő 8-10 év a vesére. Mivel egy egészséges embernek két veséje van, és eggyel sem romlik lényegesen az életkilátása, ezért az élődonoros transzplantáció a nyugati világban mindenütt előtérbe került. Ha azonban a beteg donorja (tipikusan a házastársa) nem kompatibilis a beteggel, vércsoport vagy antigén (HLA) probléma miatt, akkor a közvetlen donáció nem jöhet létre. Ha viszont van egy másik, hasonló problémával rendelkező pár, és keresztben stimmelnek az immunológiai adatok, akkor a két beteg elcserélheti egymás között a donorjait. Az első ilyen páros cserét Európában 1999-ben hajtották végre egy svájci és egy német pár között. 2004-ben indult be az első európai program Hollandiában [8], aminek

keretében a regisztrált beteg-donor párokat háromhavonta összepárosítják. Jelenleg 10 európai országban működik vesecseriprogram, amelyről a COST Action CA15210 (European Network for Collaboration on Kidney Exchange Programmes) keretében nemrég készítettünk egy tanulmányt [6].

A cseréket szinte minden működő programban egyidőben hajtják végre, hiszen lépésenként történő donáció esetén fennállhat a veszély, hogy a cserekör megszakad és az egyik beteg nemcsak kimarad a cseréből, hanem a donorját is elveszíti. Az egyetlen európai program, ahol vállaltan nem szimultán cseréket hajtanak végre (több nap alatt), Csehországban működik, itt hat-, illetve héthosszú cseréket is véghezvittek már. Az általánosan követett egyidejű cserék viszont logisztikai okokból azt eredményezik, hogy csak kis méretű, tipikusan legfeljebb háromhosszú cseréket keresnek a programokban (Hollandiában legfeljebb négyhosszút).

Az Amerikai Egyesült Államokban a New England Kidney Exchange Program volt az első vesecseriprogram, ami 2005-ben kezdte meg működését [18]. Jelenleg három nagy országos program működik egymással átfedésben: United Network for Organ Sharing (UNOS), National Kidney Registry (NKR), és Alliance for Paired Donation (APD) [13] néven, de a cserék többségét a nagyobb transzplantációs központok házon belül oldják meg. Kanadában és Ausztráliában országos programok működnek, melyeket egy tanulmányban nemrég összehasonlítottak a holland és az egyesült királyságbeli programokkal [12]. Végül két összefoglaló cikket javasunk a vesecsere témakörének áttekintésére: [12], [14].

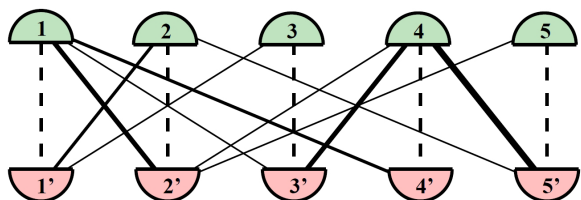
A cikk szerzője az Egyesült Királyság vesecseriprogramjának algoritmusán dolgozott 2007 és 2010 között Glasgowban, ezen alapulnak a cikkben ismertetett első leírások. A program 2007-ben kezdte meg működését az NHS Blood and Transplant szervezésében [15]. Először csak páros cseréket engedtek meg, majd 2008-tól három hosszú cseréket is alkalmaztak. Az általunk implementált első megoldási módszer egy gráfos heurisztikán alapuló egzakt algoritmus volt [7], amelyet a későbbiekben egészértékű programozási módszerre cseréltek [16]. Az elmúlt 10 évben több mint 700 beteg kapott vesét a programon keresztül.

2. A vesecseriprogram alapfeladata

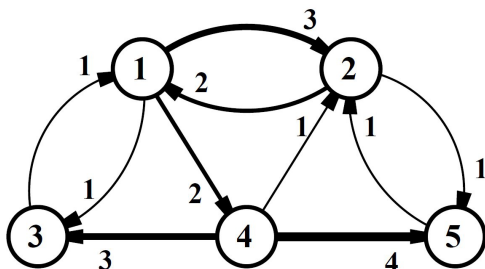
Az Európában és a világ más részein működő programok sajátosságai eltérnek egymástól, melyekről az utolsó fejezetben bővebben is írunk. Az alapfeladat viszont minden országban ugyanaz: a donációk számának maximalizálása rövid cserekörök segítségével. Ezt a feladatot fogjuk a következőkben először két gráfelméleti modell segítségével leírni, majd két egészértékű programozási leírást adni rá.

2.1. Gráfelméleti leírás, komplexitás

Amennyiben a donorokat és betegeket egy-egy csúccsal reprezentáljuk, akkor a kompatibilitási gráf egy *páros gráf* lesz, ahol egy donor akkor van összekötve egy



1. ábra. Egy öt párból álló probléma leírása a páros gráfos modellben.



2. ábra. Az előző probléma leírása az irányított gráfos modellben.

beteggel, ha az kompatibilis vele. Amennyiben a donációk minőségét is tekintjük, ahogy azt minden európai országban teszik, akkor ezt az élekre írt súlyokkal reprezentálhatjuk. A rövid cserékből álló megoldás egy olyan párosításnak felel meg ezen a gráfon, ahol egy donor akkor és csak akkor lehet fedve, ha a párja is fedve van. Az 1. ábrán egy öt donorból és öt betegből álló problémát illusztrálunk.

A feladat másik természetes gráfos leírása az *irányított gráfos* modell, ahol a csúcsok beteg-donor párokat reprezentálnak, és egy csúcsból akkor fut irányított él egy másik csúcsba, ha az első donor kompatibilis a második beteggel. Ebben a modellben a megoldás diszjunkt körök halmaza, vagyis egy ún. körpakolás. A fenti példa átírata az irányított gráfos modellben a 2. ábrán látható.

A maximális méretű vagy súlyú megoldás problémája eltérő komplexitású attól függően, hogy milyen felső korlát van adva a cserekörök hosszára nézve. Amennyiben csak kettőhosszú csereket engedünk (ahogy jelenleg Franciaországban és Svédországban teszik), akkor a feladat egy maximális méretű/súlyú párosítás feladatra redukálódik egy nempáros gráfon, amely Edmonds algoritmusával hatékonyan megoldható [11].

Amennyiben nincs megkötés a cserekörök hosszára nézve, ahogy Csehországban tekintenek a problémára, akkor szintén polinomiális időben megoldható a feladat. A maximális méretű cserek problémája esetén ezt a páros gráf egyszerű módosításával tudjuk megtenni: kössünk össze minden beteget a donorjával egy 0 súlyú éllel, a többi kompatibilis pár között futó él súlya pedig legyen 1. Az eredeti

feladatban egy maximális méretű cserének a módosított páros gráfban egy teljes maximális súlyú párosítás felel meg, melyet a magyar módszerrel gyorsan kiszámíthatunk. Amennyiben maximális súlyú megoldást keresünk (ahol a súly a donáció minőségének felel meg), akkor ugyanígy kell eljárunk, a betegek és eredeti donorjaik között 0 súlyú élt kell bevezetnünk a páros gráfban és maximális súlyú teljes párosítást találni. A konstrukció lényege, hogy amennyiben egy donor nem a saját betegével kerül párosításra, akkor az ő betege is egy kompatibilis donorral lesz párosítva, vagyis szerepelni fognak egy cserekörben, ha viszont egymással vannak párosítva, akkor nem vesznek részt cserében [1].

Sajnálatos módon a valóságban leggyakoribb eset, amikor kettőnél hosszabb, de korlátos cseréket engedünk meg, NP-nehéz feladatra vezet [1], amelyet hatékonyan közelíteni sem lehet [7]. A gyakorlatban viszont a feladatot leíró gráfok viszonylag ritkák, és emiatt exponenciális idejű egzakt algoritmus is megfelelően működött a 100-150 párból álló feladatokra az Egyesült Királyságban 2007-2010 között [7]. Ez a gráfok heurisztika azonban nem feltétlenül működik nagyobb feladatokra, illetve komplikált az átírása speciális optimalitási feltételek esetén, ezért tértek át a legtöbb országban egészértékű programozási módszerekre.

2.2. Egészértékű programozás használata

Az egészértékű programozás használatát vesecsereprogramokban először Roth és társai javasolták [17], majd Abraham és társai [1] fejlesztették ki az első szofisztikált formalizációkat az alapfeladatra, amelyek rendkívül hatékonyak bizonyultak véletlenül generált adatokon. A ma már klasszikusnak tekinthető cikkben két alapformalizációt adtak, amelyeket itt leírunk.

Elsőként az ún. *körformalizációt* írjuk le. Itt a változóink a megengedett körökön lesznek, és feltételként csupán azt fogjuk megkövetelni, hogy a kiválasztott körök ne érintsék ugyanazon beteg-donor párt egynél többször. Formálisan, jelölje $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a beteg-donor párokat, és jelölje $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ a lehetséges köröket, ahol minden C_j körhöz hozzárendelünk egy c_j bináris (0, 1) változót, továbbá jelölje w_j a C_j kör méretét (vagy súlyát). Amennyiben C_j tartalmazza a v_i párt, azt $v_i \in C_j$ -vel jelöljük. Feladatunk a következő:

$$\max \sum_{j=1}^m w_j c_j$$

$$f.h. \quad \sum_{j: v_i \in C_j} c_j \leq 1 \quad \text{minden } v_i \text{ csúcsra.}$$

A második leírást *élformalizációnak* nevezi a szakirodalom, mert itt a változók az irányított gráf élein vannak. Jelölje $v_i v_j$ a v_i csúcsból v_j csúcsba futó élt, és a hozzá tartozó bináris (0, 1) változó legyen $x(v_i v_j)$, illetve az él súlyát jelölje $w_e(v_i v_j)$. A feladat a következő.

$$\begin{aligned}
& \max_{i,j} \sum w_e(v_i v_j) x(v_i v_j) \\
& f.h. \sum_j x(v_i v_j) - \sum_j x(v_j v_i) = 0 \quad \text{minden } v_i \text{ csúcsra, és} \\
& \sum_j x(v_i v_j) \leq 1 \quad \text{minden } v_i \text{ csúcsra, valamint} \\
& x(v_{i_1} v_{i_2}) + x(v_{i_2} v_{i_3}) + \cdots + x(v_{i_{L-1}} v_{i_L}) \leq L \quad \text{minden } L \text{ hosszú útra,}
\end{aligned}$$

ahol L a körök hosszának felső korlátját jelöli, és az utak valódi utak, vagyis diszjunkt csúcsokból állnak, így körök sem lehetnek.

Mindkét alapformalizáció egyszerű, és könnyű igazolni a helyességüket. Azt viszont láthatjuk, hogy egyik egészértékű program sem kompakt, a körformalizációnál a változók száma lehet exponenciális (a feltételek száma lineáris a gráf csúcsainak számában), míg az élformalizációnál a feltételek száma lehet exponenciális (a változók száma lineáris a gráf éleinek számában). Megfelelő implementáció esetén mégis jól működhetnek, ahogy azt Abraham és társai bemutatják [1], például az oszloggenerálás technikája döntő fontosságú a körformalizációs megoldásában.

Vannak azonban újabb leírások is, amelyek kompaktak (vagyis a változók és a feltételek száma is polinomiális a gráf paramétereiben), ezek áttekintésére Dickerson és társai cikkét javasoljuk az olvasónak [9].

3. Új kihívások a vesecseréprogramokban

Ebben a fejezetben összefoglaljuk az elmúlt évek legfontosabb fejlesztéseit és kihívásait, amelyek újfajta matematikai kérdésekhez vezetnek.

3.1. Altruisztikus donorok által indított láncok

Altruisztikus donorok azok a donorok, akik nincsenek senkivel kapcsolatban, csak önzetlenül felajánlják a veséjüket, hogy ezzel megmentsenek egy ismeretlent. Az ilyen donorok száma nagyjából 2-5 minden három hónapban az Egyesült Királyságban. Eredetileg az ilyen önzetlen donorok veséit a kadaver (halott donorból származó szervekre történő) várólistán szereplő betegeknek adták, de később felismerték, hogy nagy segítséget jelenthetnek a vesecseréprogramokban is, hiszen láncot lehet létrehozni egy ilyen kezdeti donorral. Az altruisztikus láncok nagy előnye, hogy a donációkat nem kell egyidőben végrehajtani, mert először minden beteg megkaphatja a vesét, és csak utána kell a donorjának tovább adnia az övét. Az ilyen láncokat az európai országokban viszonylag röviden futtatják, abból a megfontolásból, hogy az utolsó vese hamar kerüljön egy várólistán lévő beteghez, bár Spanyolországban, Olaszországban és Csehországban egyaránt előfordult már

hathosszú lánc. Az Egyesült Államokban viszont *végtelen* altruisztikus láncokat is kezdeményeztek, ahol egyes esetekben már 60 felett jár a donációk száma [19].

A feladat matematikai oldalát ez a lehetőség nagyban befolyásolja, hiszen most már nem csak rövid köröket, de egyúttal hosszú utakat is kereshetünk az irányított gráfban. Végtelen hosszú láncok esetén a vegyes problémára adtak egészértékű programozási leírást Anderson és társai [2], ahol a *díjgyűjtő utazóügynök* probléma egy variánsát használták a megoldásban. Rövid körök és hosszabb utak esetén Dickerson és társai adtak új egészértékű programokat [9].

3.2. Deszenzitizáció mint alternatív kezelés

Az inkompatibilis beteg-donor párok között bizonyos esetekben mégis végrehajtható az átültetés, ha a beteg keresztülmegy egy költséges és időigényes deszenzitizálási procedúrán. Habár az eredmények a beültetett vese funkcióit tekintve elmaradnak a kompatibilis cserétől, ezt az eljárást sok országban (Olaszország, Franciaország, Svédország) mégis alapeljárásként használják, ami a vesecsereprogramok sikerességének is gátja, hiszen kevés inkompatibilis pár jelentkezik. A fejlett programokban először mindig a vesecsereprogramban történő részvételt javasolják a pároknak, és csak egy-két sikertelen párosítási forduló után támogatják a deszenzitizációs eljárást. Több programban, így a most induló skandináv közös programban is, a deszenzitizáció lehetőségét megengedik ismeretlen beteg-donor párok között is, amennyiben a várható eredmény jobb, mint az eredeti beteg-donor pár esetén. Hasonló kérdés merül fel kompatibilis pároknál is, akiknek több ország programjában is felajánlják a részvételt, egyrészt, hogy immunológiaiilag alkalmasabb donort találjanak a betegnek, másrészt pedig, hogy a részvételükkel másokon segítsenek.

Amennyiben a deszenzitizáció egy lehetséges cserén belüli eljárás bármelyik donor és beteg között, akkor nem feltétlenül csak a donációk számát igyekeznek maximalizálni a programokban, hanem az ezen kezelésre utalt betegek számát is minimalizálják. Ezen két cél jól definiált módon, egyszerre jelenik meg a skandináv programban [3].

3.3. Laboratóriumi tesztelelés utáni újraoptimalizálás

A kompatibilitási gráfokat a donorok és betegek külön-külön elemzett vérmintái alapján hozzák létre. Ezek a gráfok azonban nem mindig pontosak – főleg, ha nem egységes az immunológiai vizsgálat –, és emiatt az operációk előtt végrehajtott laboratóriumi vizsgálatnál (amikor a donor és beteg vérének ténylegesen összekeverik) gyakoriak a pozitív keresztpróbák. Ez az egyik fő oka a cserék meghíúsulásának. Amerikában a meghíúsult cserében szereplő párokat egyszerűen visszatesztelik a feladatba, és új cseréket keresnek, mert ott naponta-hetente történnek a futtatások. Európában viszont tipikusan háromhavonta vannak a futtatások, ezért a laboratóriumi tesztek után sok programban rögtön igyekeznek javított megoldást találni.

A javítás szempontjából a legnagyobb európai program, az Egyesült Királyság programja, a leginkább kötött: ott csak egyfajta javítást engedélyeznek. Amennyiben a $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_k \rightarrow v_i$ háromhosszú cserében van egy ún. *visszaél*, például $v_j v_i$, és a $v_j v_k$ vagy $v_k v_i$ élek valamelyike sérül, akkor még megpróbálják a beágyazott $v_i \leftrightarrow v_j$ kettő hosszú cserét végrehajtani. Ezért is alakítják úgy az eredeti optimalizálási feladatot, hogy az ilyen beágyazott kettőhosszú köröket tartalmazó háromhosszú köröket találják meg nagy számban.

A kisebb programok esetén egyrészt a megoldás is kisebb, és általában a tesztelés is gyorsabban működik, ezért sokkal rugalmasabb módon tudják javítani a megoldást. Hollandiában például iteratív tesztelést végeznek: először az első cserékort tesztelik, ha ez rendben van, akkor folytatják a második cserekörrel, ha viszont probléma akad, akkor a teljes megoldást újraszámolják. Matematikai értelemben a robosztus párosítások kérdésköre áll a legközelebb a feladatkörhöz, de egészértékű programozással is kereshető várható értékben jó megoldás [10].

3.4. Stratégiai kérdések kórházaknál és nemzetközi együttműködésben

Az amerikai vesecsereprogramok egyik legnagyobb problémája, hogy a transzplantációs központok gyakran nem jelentik a könnyen párosítható beteg-donor párjaikat, mert ezeknek házon belül keresnek párt [4]. Az országos programokban ezért túlsúlyba kerülnek a nehezen párosítható beteg-donor párok, és emiatt nehéz cseréket találni. Több megoldási javaslat közül az egyik programban krediteket kezdtek el osztani a jól párosítható párokat regisztráló kórházaknak, amelyek révén a későbbiekben előnyben részesítik ezen kórház betegeit a nehezen párosítható betegek kiválasztásakor.

Hasonló kérdések merülnek fel a nemzetközi programokban is. Európában a cseh és osztrák program lényegében már egybeolvadt, amihez esetleg hazánk is csatlakozhat majd a jövőben, és a skandináv országokban is rögtön egy svéd-norvég-dán közös programban kezdték meg a működést. Itt is felmerül a kérdés, hogy az országok vajon a könnyen létrehozható cseréket nem fogják-e országon belül végrehajtani, illetve nem vétóznak-e meg egy olyan közös optimális megoldást, amelyet országon belül javítani tudnának. Ezen kérdések vizsgálatában a matematikai megközelítés mellett a játékelméleti modellek is a segítségünkre lehetnek.

Köszönetnyilvánítás

Bíró Péter kutatását az MTA Lendület Programja (LP2016-3/2017), az MTA Kiválósági Együttműködési Programja (KEP-6/2018) és az NKFIH (OTKA) K129086 pályázata támogatta.

Hivatkozások

- [1] ABRAHAM, D. J., BLUM, A., AND SANDHOLM, T.: *Clearing algorithms for barter exchange markets: Enabling nationwide kidney exchanges*, in: *Proceedings of the 8th ACM conference on Electronic commerce*, pp. 295-304, ACM (2007).
- [2] ANDERSON, R., ASHLAGI, I., GAMARNIK, D., AND ROTH, A. E.: *Finding long chains in kidney exchange using the traveling salesman problem*, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. **112** No. **3**, pp. 663-668 (2015).
- [3] ANDERSSON, T., KRATZ, J., *et al.*: *Kidney exchange over the blood group barrier*, Department of Economics, Lund University Working Papers, Vol. **11** (2015).
- [4] ASHLAGI, I. AND ROTH, A. E.: *New challenges in multihospital kidney exchange*, *The American Economic Review*, Vol. **102** No. **3**, pp. 354-359 (2012).
- [5] BIRÓ, P.: *Applications of Matching Models under Preferences*, in: ENDRIS, U. (Hg.), *Trends in Computational Social Choice*, chap. **18**, pp. 345-373, AI Access (2017).
- [6] BIRÓ, P., BURNAPP, L., HAASE, B., HEMKE, A., JOHNSON, R., VAN DE KLUNDERT, J., MANLOVE, D., BĀŠHMIG, G., BOND, G., KUYPERS, D., SMEULDERS, B., SPIEKMA, F., FRONEK, J., SALONEN, M., JACQUELINET, C., MACHER, M.-A., MENOUDAKOU, G., ÅSGEIRSSON, E. I., WILSON, N., DI CIACCIO, P., SPARACINO, V., KIESZEK, R., BOLOTINHA, C., BALTISOVÁ, T., CECHLÁROVÁ, K., VALENTÍN MUNOZ, M. D. L. O., ANDERSSON, T., HADAYA, K., AND LEISHMAN, R.: *Kidney Exchange Practices in Europe: First Handbook of the COST Action CA15210: European Network for Collaboration on Kidney Exchange Programmes (ENCKEP)*, http://www.enckep-cost.eu/assets/content/57/handbook1_28july2017-20170731121404-57.pdf (2017).
- [7] BIRO, P., MANLOVE, D. F., AND RIZZI, R.: *Maximum weight cycle packing in directed graphs, with application to kidney exchange programs*, *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. **1** No. **04**, pp. 499-517 (2009).
- [8] DE KLERK, M., WITVLIET, M. D., HAASE-KROMWIJK, B., WEIMAR, W., AND CLAAS, F.: *A flexible national living donor kidney exchange program taking advantage of a central histocompatibility laboratory: the Dutch model*, *Clinical Transplantation*, Vol. **8**, pp. 69-73 (2008).
- [9] DICKERSON, J. P., MANLOVE, D. F., PLAUT, B., SANDHOLM, T., AND TRIMBLE, J.: *Position-indexed formulations for kidney exchange*, in: *Proceedings of the 2016 ACM Conference on Economics and Computation*, pp. 25-42, ACM (2016).
- [10] DICKERSON, J. P., PROCACCIA, A. D., AND SANDHOLM, T.: *Failure-aware kidney exchange*, in: *Proceedings of the fourteenth ACM conference on Electronic commerce*, pp. 323-340, ACM (2013).
- [11] EDMONDS, J.: *Paths, trees, and flowers*, *Canadian Journal of mathematics*, Vol. **17** No. **3**, pp. 449-467 (1965).
- [12] FERRARI, P., WEIMAR, W., JOHNSON, R. J., LIM, W. H., AND TINCKAM, K. J.: *Kidney paired donation: principles, protocols and programs*, *Nephrology Dialysis Transplantation*, Vol. **30** No. **8**, pp. 1276-1285 (2015).
- [13] FUMO, D., KAPOOR, V., REECE, L., STEPKOWSKI, S., KOPKE, J., REES, S., SMITH, C., ROTH, A., LEICHTMAN, A., AND REES, M.: *Historical Matching Strategies in Kidney Paired Donation: The 7-Year Evolution of a Web-Based Virtual Matching System*, *American Journal of Transplantation*, Vol. **15** No. **10**, pp. 2646-2654 (2015).

- [14] GLORIE, K., HAASE-KROMWIJK, B., KLUNDERT, J., WAGELMANS, A., AND WEIMAR, W.: *Allocation and matching in kidney exchange programs*, Transplant International, Vol. **27** No. **4**, pp. 333-343 (2014).
- [15] JOHNSON, R. J., ALLEN, J. E., FUGGLE, S. V., BRADLEY, J. A., AND RUDGE, C.: *Early experience of paired living kidney donation in the United Kingdom*, Transplantation, Vol. **86** No. **12**, pp. 1672-1677 (2008).
- [16] MANLOVE, D. F. AND O'MALLEY, G.: *Paired and altruistic kidney donation in the UK: Algorithms and experimentation*, Journal of Experimental Algorithmics (JEA), Vol. **19**, pp. 2-6 (2014).
- [17] ROTH, A. E., SÖNMEZ, T., AND ÜNVER, M.: *Efficient kidney exchange: Coincidence of wants in markets with compatibility-based preferences*, The American Economic Review, Vol. **97** No. **3**, pp. 828-851 (2007).
- [18] ROTH, A. E., SÖNMEZ, T., AND ÜNVER, M. U.: *A kidney exchange clearinghouse in New England*, American Economic Review, Vol. **95** No. **2**, pp. 376-380 (2005). DOI: 10.1257/000282805774669989
- [19] STEPKOWSKI, S., FUMO, D. E., REESE, L. J., KOPKE, J. E., ROTH, A. E., LEICHTMAN, A. B., AND REES, M. A.: *Advantages Of Chains Vs. Cycles In A Kidney Paired Donation Program: A 7-year Analysis*, Transplant International, Vol. **28**, p. 18 (2015).

Bíró Péter fényképe és rövid életrajza az előző cikk (melynek szintén szerzője) végén található.

BIRÓ PÉTER

Magyar Tudományos Akadémia
 Közgazdaságtudományi Intézet
 1112 Budapest, Budaörsi út 45.
 Budapesti Corvinus Egyetem
 Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
 1093 Budapest, Fővám tér 8.
 peter.biro@krtk.mta.hu

MATHEMATICS OF KIDNEY EXCHANGE PROGRAMMES

PÉTER BIRÓ

When a patient with end stage renal disease has a willing, but immunologically incompatible donor, then she can try to exchange her donor with another patient of the same situation. Centrally coordinated kidney exchange programmes are operating in many countries across the world, designed and studied by economists, computer scientists, and mathematicians. In this writing we give a short summary on the graph theoretical model behind this application, its computational complexity, and solution by integer programming.

Keywords: matching, exchange problems, cycle packing, integer programming.

Mathematics Subject Classification (2000): 90C10, 91B68, 05C70.

ERŐSEN NÉPSZERŰ PÁROSÍTÁS KERESÉSE BIZONYOS PÁROS PREFERENCIARENDSZEREKBE

KIRÁLY TAMÁS, MÉSZÁROS-KARKUS ZSUZSA

A népszerű párosítás probléma bonyolultsága döntetlenes páros preferenciarendszerekben nagyban függ a döntetlenek struktúrájától. Ha az egyik oldalon a csúcsok szigorú preferenciájúak, míg a másik oldalon indifferensek (de jobban szeretnek párosítva lenni, mint páratlanul maradni), akkor polinom időben tudunk népszerű párosítást keresni (Cseh, Huang és Kavitha [2]). Másrészt ugyanebben a cikkben azt is belátták, hogy a probléma NP-teljessé válik, ha szigorú preferenciájú csúcsok mindkét oldalon lehetnek, míg indifferens csúcsok csak az egyik oldalon. Megmutatjuk, hogy az erősen népszerű párosítás keresésének problémája megoldható polinom időben az utóbbi esetben is.

1. Bevezetés

Egy $(G = (V, E), \preceq)$ preferenciarendszer egy $G = (V, E)$ gráfból és minden $v \in V$ -re a v -re illeszkedő élek egy \preceq_v részbenrendezéséből áll. Egy $v \in V$ csúcs egy adott preferenciarendszerben *jobban szereti* az M_1 párosítást, mint az M_2 -t, ha M_1 -ben párosítva van, de M_2 -ben nem, vagy ha M_1 -ben jobb élen van párosítva, mint M_2 -ben. Egy M_1 párosítás *népszerűbb*, mint egy M_2 párosítás, ha azon csúcsok száma, amelyek jobban szeretik M_1 -et, mint M_2 -t, szigorúan nagyobb, mint azon csúcsok száma, amelyek jobban szeretik M_2 -t, mint M_1 -et. Egy M párosítás *népszerű*, ha nincs olyan párosítás, ami népszerűbb nála, és *erősen népszerű*, ha M népszerűbb bármely másik párosításnál. Ezeket a fogalmakat Gärdenfors [6] vezette be, aki megmutatta, hogy szigorú preferenciák esetén minden stabil párosítás népszerű, és minden erősen népszerű párosítás stabil.

Egy preferenciarendszerben nyilván nem lehet két különböző erősen népszerű párosítás, mivel ekkor mindkettő népszerűbb lenne a másikonál, ami lehetetlen. Sőt, egy erősen népszerű párosítás szükségképp az egyetlen népszerű párosítás – viszont létezik olyan preferenciarendszer, ahol ugyan egyetlen népszerű párosítás van, de az nem erősen népszerű (erre [1] technical report változatában található példa).

Az utóbbi időben nagy érdeklődés övezi a népszerű párosításokkal kapcsolatos algoritmikus kérdéseket; a nemrégiben született eredmények egy rövid összefoglalóját lásd az 1.1. fejezetben. Itt csak megemlítjük, hogy bármely döntetlenes

preferenciarendszer esetén polinom időben eldönthető, hogy egy adott párosítás népszerű vagy erősen népszerű-e (a probléma visszavezethető egy maximális súlyú teljes párosítás feladatra egy élsúlyozott segédgráfban [1]). Ez azt jelenti, hogy a népszerű párosítások döntési problémája az NP bonyolultsági osztályban van, míg az erősen népszerű párosítások döntési problémája a kevésbé ismert UP (Unambiguous Polynomial-time) bonyolultsági osztályba esik. Az utóbbi osztály, melyet Valiant [11] vezetett be, azokból a döntési problémákból áll, melyek megoldhatók egy NP-géppel úgy, hogy a feladat egy „nem” példányában egyik tanút sem fogadja el, míg a feladat egy „igen” példányában pontosan egy tanút fogad el. Az erősen népszerű párosítás probléma ebbe az osztályba tartozik, mivel a feladat egy „igen” példányában van egy egyértelmű erősen népszerű párosítás, és ez polinom időben ellenőrizhető.

Ebben a cikkben olyan páros preferenciarendszerekkel foglalkozunk, amelyekben a következő két típusú csúcs fordul elő: *szigorú preferenciájú* csúcsok, ahol a \preceq_v preferencia-sorrend egy lineáris rendezés, és *indifferens* csúcsok, ahol a csúcs minden rá illeszkedő élt egyformán szeret (de jobban szeret párosítva lenni). Ha minden csúcs szigorú preferenciájú, akkor minden stabil párosítás népszerű. Ebből viszont következik, hogy mindig létezik népszerű párosítás, és találhatunk egyet a jól ismert Gale–Shapley-algoritmussal [5]. Másrészt el tudjuk dönteni, hogy létezik-e erősen népszerű párosítás, úgy, hogy találunk egy tetszőleges népszerű párosítást, és leellenőrizzük, hogy erősen népszerű-e (ez működik nem páros, szigorú preferenciarendszerek esetén is [1]).

A problémák nehezebbé válnak, ha az egyik oldalon megengedünk indifferens csúcsokat is. Abban az esetben, ha az egyik oldalon minden csúcs szigorú preferenciájú, míg a másik oldalon minden csúcs indifferens, Cseh, Huang és Kavitha [2] adott egy polinom idejű algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e népszerű párosítás. Azonban ha szigorú preferenciájú csúcsokat mindkét oldalon megengedünk, míg indifferens csúcsokat csak az egyikben, a probléma NP-teljessé válik [2, 3].

Ennek a cikknek a fő eredménye, hogy az *erősen* népszerű párosítás létezése polinom időben eldönthető az utóbbi esetben is.

1.1. TÉTEL. *Adott $(G = (S, T; E), \preceq)$ páros preferenciarendszer esetén, ahol az S -beli csúcsok szigorú preferenciájúak, míg minden T -beli csúcs vagy szigorú preferenciájú, vagy indifferens, polinom időben eldönthető, hogy van-e erősen népszerű párosítás.*

1.1. Kapcsolódó eredmények

Az utóbbi időben több eredmény is született a népszerű párosítás probléma bonyolultságáról. Szigorú páros preferenciarendszerek esetén Huang és Kavitha [7] megmutatta, hogy tudunk polinom időben maximális méretű népszerű párosítást keresni, míg Cseh és Kavitha [4] annak eldöntésére adott algoritmust, hogy egy adott él benne van-e népszerű párosításban. Nyitott kérdés viszont annak

a döntési problémának a bonyolultsága, hogy egy adott szigorú, nem páros preferenciarendszerben van-e népszerű párosítás. Huang és Kavitha [8] bevezette a népszerűtlenségi faktor fogalmát, és megmutatta, hogy minden pozitív ε esetén NP-teljes megadni egy olyan párosítást, amelynek népszerűtlenségi faktora legfeljebb $\frac{4}{3} - \varepsilon$ -szorosa az optimálisnak.

2. Az algoritmus

Ebben a fejezetben ismertetjük az 1.1. tételt bizonyító algoritmust. Adott egy $G = (S, T; E)$ páros multigráf, ahol a T csúshalmaz két részre, T_P -re és T_I -re van osztva. Az $S \cup T_P$ -beli csúcsok szigorú preferenciájúak, míg a T_I -beli csúcsok indifferensek (de jobban szeretnek párosítva lenni). Adunk egy polinom idejű algoritmust, ami eldönti, hogy a feladat egy adott példányában van-e erősen népszerű párosítás (röviden ENP).

Az algoritmus során módosításokat hajtunk végre az aktuális preferenciarendszeren a következő két *redukáló műveletet* használva:

1. Törlünk éleket, amelyek nem szerepelhetnek az aktuális preferenciarendszer ENP-jében, vagyis *törölhetők*, és törlünk minden keletkező izolált csúcsot.
2. Rögzítünk éleket, amelyeknek mindenképpen szerepelniük kell az aktuális preferenciarendszer ENP-jében (feltéve hogy az létezik), vagyis *rögzíthetők*. A rögzített élek halmazát F -fel jelöljük. A rögzített éleket töröljük a végpontjaikkal együtt, és töröljük a keletkező izolált csúcsokat.

Legyen $G^k = (S^k, T^k; E^k)$ az aktuális preferenciarendszer k fenti művelet elvégzése után, és legyen F az eddig rögzített élek halmaza. Az algoritmus helyességének kulcsa az alábbi lemma, amit itt bizonyítás nélkül közlünk.

2.1. SEGÉDTÉTEL. *Ha az eredeti preferenciarendszerben van egy M ENP, akkor $F \subseteq M$, és $M \setminus F$ is ENP-je G^k -nak.*

Lehetséges, hogy G^k -ban van ENP, holott G -ben nincs, de ez nem probléma, mivel ha redukáló műveletekkel eljutunk az üres gráfhoz, akkor a lemma szerint F az egyetlen lehetséges jelölt ENP-re, és polinom időben ellenőrizhetjük, hogy ez G -nek ENP-je, vagy sem. Ugyanakkor ha G^k -ban nincs ENP, akkor a lemma szerint G -ben sincs.

Összefoglalva, az a stratégiánk, hogy addig hajtunk végre redukáló műveleteket, amíg eljutunk az üres gráfhoz, vagy bizonyítékot találunk rá, hogy nincs ENP. A redukálási műveletek leírásához szükségünk van az aktuális gráf következő megírására.

Írányítás: Minden $v \in S \cup T_P$ csúcsnak megíranyítjuk a kedvenc élet a másik végpontja felé. Az írányítást újra végrehajtjuk minden redukció után.

Az alábbi pontokban részletezzük, hogy mely élek törölhetők, illetve rögzíthetők. Ezek a műveletek konstruktívak olyan szempontból, hogy a nevezett éleket meg is tudjuk találni lineáris időben. Az algoritmus sorban törli, illetve rögzíti a pontok szerint törölhető, illetve rögzíthető éleket, úgy, hogy mindig feltesszük, hogy az aktuális preferenciarendszer nem redukálható tovább a korábbi pontok alapján.

Azon T_I -beli csúcsok halmazát, amelyekbe több mint egy irányított él lép, jelöljük T_1 -gyel, és legyen $T_2 := T_I \setminus T_1$.

- Ha egy $v \in S \cup T_P$ csúcsba lép egy uv irányított él, akkor a v szerint uv -nél rosszabb élek nem szerepelhetnek ENP-ben, vagyis törölhetők.
- Ha valamikor egyetlen st irányított él lép egy T_I -beli csúcsba, akkor ha van ENP, akkor st benne van, vagyis st rögzíthető. Következésképp ez után a redukció után a T_2 -beli csúcsokba nem lép irányított él.
- Tegyük fel, hogy az st él benne van az aktuális gráfban, ahol $s \in S$, $t \in T_2$. Ekkor st -nél s szerint rosszabb él nem lehet ENP-ben, vagyis ezek törölhetők.
- Ha egy $G[S \cup T_P \cup T_1]$ -beli él nem irányított, akkor nem szerepelhet ENP-ben, vagyis törölhető.
- Ha egy S -beli s csúcsba nem lép irányított él, és s -ből nem megy (irányítatlan) él T_2 -be, akkor az s -ből kilépő irányított él benne van az ENP-ben (ha létezik), vagyis rögzíthető.

2.2. SEGÉDTÉTEL. *Ha a fentiek alapján végrehajtott redukciókkal nem az üres gráfhoz jutunk, akkor G -ben nincs ENP.*

A lemma bizonyítása megtalálható a cikk technical report változatában [10]. A bizonyítás azon alapszik, hogy ha nem az üres gráfhoz jutunk, akkor a redukált gráf tartalmaz egy olyan kört, ami mentén cserélve ugyanolyan népszerű párosítást kapunk.

Mivel minden redukáló művelet csökkenti az élek számát, az algoritmus legfeljebb élszámnyi redukció után véget ér. Ha az üres gráfhoz jutunk, az egyetlen jelölt ENP-re F , és polinom időben ellenőrizhetjük, hogy ez ENP-je-e G -nek.

Megjegyzés. Az 1.1. tételre adott algoritmus kis módosításokkal működik arra az esetre is, amikor az egyik oldal szigorú preferenciájú, a másik oldalon pedig csak a preferencialisták végén lehet döntetlen. Ebben az esetben az algoritmus során azokat a csúcsokat, amelyek nem indifferensek, szigorú preferenciájúnak tekintjük mindaddig, míg nem töröltünk annyi élt a listájukról, hogy indifferensekké váltak.

3. Konklúzió

A cikkben leírt módszerrel olyan páros preferenciarendszerekben lehet eldönteni erősen népszerű párosítás létezését, ahol az egyik osztályban csak szigorú preferenciák vannak. Nyitott kérdés, hogy polinom időben megoldható-e a feladat, ha mindkét oldalon lehetnek indifferens csúcsok is. További kérdés, hogy az eredmény kiterjeszthető-e olyan preferenciákra, ahol nem csak a lista végén lehetnek döntetlenek.

Alkalmazások szempontjából érdekes lehet a feladatnak az az általánosítása, ahol az egyes csúcsok szavazatának különböző a súlya. Erről a változatról nagyon keveset tudni, mind a népszerű párosítások, mind az erősen népszerű párosítások vonatkozásában. Nyitott, hogy utóbbinak a bonyolultsága a legáltalánosabb változatban (nem páros gráf, tetszőleges preferenciák) hogy viszonyul egyes nehéznek gondolt UP-beli problémák bonyolultságához.

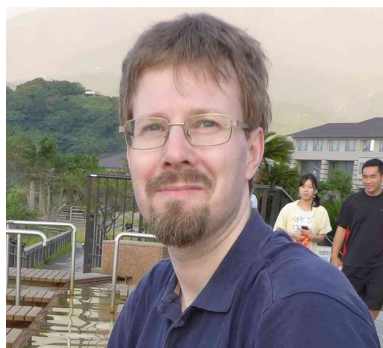
Köszönetnyilvánítás

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal - NKFIH 120254 számú pályázata és az MTA KEP-6/2017 projektje támogatta.

Hivatkozások

- [1] P. Biró, R. W. Irving, and D. F. Manlove, *Popular matchings in the marriage and room-mates problems*, In Proceedings of CIAC '10: the 7th International Conference on Algorithms and Complexity, volume 6078 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 97-108 (2010). Technical Report: <http://eprints.gla.ac.uk/39469/>
- [2] Á. Cseh, C.-C. Huang, and T. Kavitha, *Popular matchings with two-sided preferences and one-sided ties*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. **31** No. **4**, pp. 2348-2377 (2017).
- [3] Á. Cseh, *Complexity and algorithms in matching problems under preferences*, Ph.D. Thesis, TU Berlin (2016).
- [4] Á. Cseh, T. Kavitha, *Popular Edges and Dominant Matchings*, Mathematical Programming (2017), <https://doi.org/10.1007/s10107-017-1183-y>
- [5] D. Gale, L.S. Shapley, *College admissions and the stability of marriage*, American Mathematical Monthly, Vol. **69**, pp. 9-15 (1962).
- [6] P. Gärdenfors, *Match making: assignments based on bilateral preferences*, Behavioural Science, Vol. **20**, pp. 166-173 (1975).
- [7] C.-C. Huang, T. Kavitha, *Popular Matchings in the Stable Marriage Problem*, Automata, Languages and Programming, Volume 6755 of the series Lecture Notes in Computer Science, pp. 666-677 (2011).

- [8] C.-C. Huang, T. Kavitha, *Near-Popular Matchings in the Roommates Problem*, SIAM J. Discrete Math., Vol. **27**, pp. 43-62 (2013).
- [9] R.W. Irving, *An efficient algorithm for the “stable roommates” problem*, Journal of Algorithms, Vol. **6**, pp. 577-595 (1985).
- [10] T. Király, Zs. Mészáros-Karkus, *Finding strongly popular matchings in certain bipartite preference systems*, EGRES Technical Report 2016-16.
<http://bolyai.cs.elte.hu/egres/tr/egres-16-16.pdf>.
- [11] L. G. Valiant, *Relative complexity of checking and evaluating*, Information Processing Letters, Vol. **5**, pp. 20-23 (1976).



Király Tamás 1975-ben született. 2004-ben szerzett matematikus PhD fokozatot, és 2013-ban habilitált az ELTE Matematikai Intézetében. Jelenleg az ELTE TTK Operációkutatási Tanszékén docens, valamint tagja az MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoportnak. 2004-ben Grünwald Géza Emlékérmét, 2009-ben Akadémiai Ifjúsági Díjat kapott. 27 folyóiratcikke és egy könyvfejezete jelent meg, független idézeteinek száma 240.



Mészáros-Karkus Zsuzsa 1990-ben született. Az ELTE matematikus mesterszakján végzett 2015-ben. Jelenleg az ELTE alkalmazott doktori programjának hallgatója, témája a stabil párosítások általánosításai. Két cikke jelent meg.

KIRÁLY TAMÁS
MÉSZÁROS-KARKUS ZSUZSA

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Operációkutatási Tanszék
MTA–ELTE Egerváry Kutatócsoport
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C
tkiraly@cs.elte.hu, karkuszsuzsi@gmail.com

FINDING STRONGLY POPULAR MATCHINGS IN CERTAIN BIPARTITE PREFERENCE SYSTEMS

TAMÁS KIRÁLY, ZSUZSA MÉSZÁROS-KARKUS

A *bipartite preference system with ties* consists of a bipartite multigraph $G = (S, T; E)$ and partial orders \preceq_v on the edges incident to v , for every node $v \in S \cup T$. Given a bipartite preference system with ties, a node *prefers* a matching M_1 to a matching M_2 if either it is matched in M_1 but not in M_2 , or it is matched by a better edge in M_1 than in M_2 . A matching M_1 is *more popular* than matching M_2 if the number of nodes preferring M_1 to M_2 is strictly larger than the number of nodes preferring M_2 to M_1 . A matching M is *popular* if no matching is more popular than M , and it is *strongly popular* if M is more popular than any other matching.

In this paper we consider bipartite preference systems with two types of nodes: *nodes with strict preferences*, where the preference order \preceq_v is a linear order, and *indifferent nodes*, where every incident edge is equally good (but who still prefer to be matched). If all nodes have strict preferences, then every stable matching is popular. On one hand, this implies that there always exists a popular matching and one can be found using the well-known Gale–Shapley-algorithm. On the other hand, we can decide if a strongly popular matching exists by finding an arbitrary stable matching and checking whether it is strongly popular.

The problems become more difficult if indifferent nodes are allowed on one side. For the case when nodes on one side have strict preferences while those on the other side are all indifferent, Cseh, Huang, and Kavitha [2] gave a polynomial-time algorithm for deciding if a popular matching exists. However, if one side has strict preferences while the other side may feature both indifferent nodes and nodes with strict preferences, then the problem becomes NP-complete[2, 3].

The main result of the present paper is that the existence of a *strongly popular matching* can be decided in polynomial time even in the latter case.

Theorem. Given a bipartite preference system $(G = (S, T; E), \preceq)$ where nodes in S have strict preferences and each node in T is either indifferent or has strict preferences, it can be decided in polynomial time if there is a strongly popular matching.

Keywords: bipartite matching, social choice, efficient algorithms, popular matching.

Mathematics Subject Classification (2000): 05C70, 91B14, 91B68.

IGAZSÁGOS TORTAOSZTÁSI ALGORITMUSOK EGYENLŐ ÉS NEMEYENLŐ FELOSZTÁSI ARÁNYOKON

FLEINER TAMÁS, ROMSICS ERZSÉBET

A dolgozatban bemutatjuk az arányos tortaosztzkodás elméletéhez tartozó matematikai apparátus egy részét, majd új eredményeket ismertetünk: az arányos osztzkodást végző Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmust, amely nem túl erős feltételek mellett erősebb, szigorúan arányos elosztás ad, és a Részvénytársaság Felosztás Algoritmust, amely sikeresen végzi el a k -személyes nem egyenlő részesedések melletti arányos osztzkodást.

1. Bevezetés

Az igazságos osztzkodás számos történelmi forrás szerint már az ókorban is problémákat okozott az akkori társadalomnak. Több írásos emléket találunk, amelyben a hatalom vagy az egyház rögzíti a különböző javak felosztásának szabályait. Attól függően, hogy a felosztandó jószág milyen tulajdonságokkal rendelkezik, többféle, gyakorlati problémára vonatkozó igazságos osztzkodási eljárás ismert. A pénzzel reprezentálható osztzkodások viszonylag egyszerűek, mert a pénz homogén és bárhogy felosztható. Ha például a válófélben lévő házastársak a közös vagynonon osztzkodnak, és a vagyonnak része valamilyen feloszthatatlan jószág (mondjuk egy autó), akkor az osztzkodás közben arra is kell figyelnünk, hogy ezt az autót ne vágjuk ketté. Természetesen sok esetben egyáltalán nem létezik a feladatnak tökéletes megoldása. Az arányos tortaosztás során egy olyan jószágot osztunk fel, amely heterogén állagú és korlátlanul felosztható. Ez azt jelenti, hogy a játékosok értékelhetnek egy adott szeletet (tortarészt) különbözőképpen, továbbá bárhogy is vágjuk a torta valamely szeletét két tetszőleges szeletre, e két szelet összértéke megegyezik az eredeti szelet értékével. A jelen munka célja két konkrét tortaosztó algoritmus bemutatása.

A Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus arányos osztzkodást végez, azaz egyenlő részesedések esetén arányosan osztja szét a tortát. Itt az ún. együttesen abszolút folytonosság tulajdonság megléte esetén könnyen elérhető, hogy az osztzkodásunk szigorúan arányos legyen, azaz mindenki szigorúan többet kapjon a részesedésénél.

A Részvénytársaság Felosztás Algoritmus sikeresen végzi el k személyre a nem egyenlő részesedések melletti arányos osztozkodást. Az algoritmus alapjaként a Részvénytársaság Szétválasztás szubrutin szolgál, amely kettévág egy részvénytársaságot (ami itt a felosztandó jószágot jelenti), majd a játékosok a számukra jövedelmezőbb oldalra próbálnak helyezkedni a részvényeik cserélgetésével. A hatékonyságot alátámasztandó, igazolunk a vágásszámra egy felső becslését. Ez általában nem éles, így többnyire az algoritmus még ennél is jobban teljesít.

A Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus az általunk Oszd Meg és Uralkodj Algoritmusnak nevezett Even–Paz-eljárás alapján készült [2, 3, 4]. Ez utóbbi módszer lényege, hogy egy vágással úgy vágja szét a tortát, és szeparálja ezáltal kisebb csoportokra a játékosokat, hogy mindenki pontosan egy szeleten osztozkodjon tovább. Egy adott szelet szétदारabolását pedig addig folytatjuk, amíg minden szeletnek legfeljebb 2 tulajdonosa van. E két játékos pedig már egyszerűen elosztja az adott szeletet: az egyik vág, a másik választ. Ebben az eljárásban szerepel egy passzív játékos is, aki a többiek egyidejű cselekvése után, azokat mérlegelve hozza meg saját döntését a torta szeleteléséről. Ezzel lehetőséget kap, hogy akár jóval értékesebb szeletet kapjon a tortából, mint a részesedése. A Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus elkerüli ezt a játékosok közti aszimetriát, mégis legtöbbször eléri, hogy mindenki szigorúan többet kapjon a jussánál. Másik eredményünk, a Részvénytársaság Felosztás Algoritmus általánosítja az ismert kétszemélyes Közel Felező Algoritmust. Ezek az algoritmusok arra szolgálnak, hogy olyan osztozkodásokat hajtsanak végre, melyekben a játékosok nem egyenlő arányban részesednek a tortából [3]. A Közel Felező Algoritmusban a vágó játékos közel felezi a tortát, míg a másik játékos szeletet választ, és ezzel lecsökken a részesedése a maradékból. A megmaradt szeleten addig alkalmazzák újra a közel felezés módszerét, amíg egyenlő részesedésekhez jutnak, és egy vágással befejezhetik az osztozkodást. Robertson és Webb könyve megemlíti egy lehetséges általánosítást [3]. Ha feltesszük, hogy $k - 1$ személy már arányosan elosztotta a tortát, akkor a k -személyes felosztást meghatározhatjuk úgy, hogy a k . személy (akinek még nincs tortája) a kétszemélyes Közel Felező Algoritmust használva külön-külön osztozkodik a többi játékoskal a saját szeleteiken. Ennek az algoritmusnak egy hátránya, hogy igen sok vágást igényel, így a sok újraosztás miatt a játékosok tipikusan igen sok különálló darabot kapnak. Akit a probléma részletesebben érdekel, Tasnádi Attila Igazságos elosztások című könyvének ezt a fejezetét olvassa el [4].

Jelen munkánk az alábbiak szerint épül fel. A második fejezetben a tortaosztással kapcsolatos, számunkra szükséges alapvető fogalmakat tisztázzuk. A harmadik a Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmust és annak tulajdonságait írja le, majd a negyedik a Részvénytársaság Felosztás Algoritmust mutatja be.

2. Az arányos tortaosztás leírása

Legyen az $X = [0, 1]$ halmaz egy heterogén, felosztható jószág, melyet ezentúl tortának hívunk (a leírtak az \mathbb{R}^n minden mérhető, korlátos halmazára általánosíthatóak). Legyen $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ a játékosok csoportja, akik a tortát egymás közt felosztják. Legyen az indexhalmazunk $I := \{1, 2, \dots, k\}$. Minden P_i játékos ezentúl az $X_i \subset X$ halmazban részesül, valamint egy μ_i mértékkel rendelkezik. Ez a μ_i egy végesen szubadditív mérték:

$$\forall k < \infty : \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^k X_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \mu(X_i), \quad (1)$$

abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre:

$$\forall X_j \subset X : \quad \lambda(X_i) = 0 \Rightarrow \mu_i(X_j) = 0, \quad (2)$$

és normált, azaz

$$\mu_i(X) = 1. \quad (3)$$

Jegyezzük meg, hogy μ és ν mérték együttesen abszolút folytonos, ha egymásra abszolút folytonosak, azaz

$$\forall X_j \subset X : \quad \mu(X_j) = 0 \Leftrightarrow \nu(X_j) = 0. \quad (4)$$

Az X egy *felosztása* az $\{X_i\}_{i \in I}$ rendszer, ha

$$\bigcup_{i \in I} X_i = X, \text{ és } \forall i \neq j : X_i \cap X_j = \emptyset.$$

A torta, mint egy szétoosztandó jószág, részhalmazainak lehet különböző tulajdonsága, vagyis két azonos Lebesgue-mértékű részhalmaz képviselhet más értéket az egyes játékosoknak, és mindenki annál boldogabb, minél nagyobb szeletet kap. Minden játékos egy nemnegatív valós számot rendel a tortaszeletekhez, vagyis értékeli őket a saját mértéke szerint. Fontos megjegyeznünk, hogy a szeletek értékének megadásakor az egyes játékosok döntései egymástól függetlenek. Ez azt jelenti, hogy nem ismerik a többiek mértékét, nem tudják, hogy milyen értékűnek tartják az egyes szeleteket.

A P_i játékos tortából való *részesedését* reprezentálja $d_i \in \mathbb{N}^+$, azaz a P_i játékos $\frac{d_i}{\sum_{j \in I} d_j} \in]0, 1[$ részét szeretné a tortának. Feltehető, hogy a d_i részesedések relatív prímek. Egy felosztást *arányosnak* nevezünk, ha minden játékos úgy gondolja, hogy legalább a részesedésével arányos halmazzal kapott a tortából, azaz

$$\mu_i(X_i) \geq \frac{d_i}{\sum_{j \in I} d_j} \quad \forall i \in I. \quad (5)$$

Arányos osztozkodási feladatnak nevezzük a problémát, ha:

$$d_i = 1 \quad \forall i \in I, \quad (6)$$

vagyis mindenki egyenlő részben részesül a tortából. Ha minden P_i játékos szigorúan nagyobb részét kapja a tortának, mint az arányos részesedése, akkor azt mondhatjuk, hogy az osztozkodás *szigorúan arányos*, azaz ha:

$$\mu_i(X_i) > \frac{d_i}{\sum_{j \in I} d_j} \quad \forall i \in I. \quad (7)$$

Az osztozkodáshoz maximálisan szükséges vágásokról hozott döntések számát a tortaosztó algoritmus *vágásszámának* nevezzük. Ez azt jelenti, hogy egyéb paraméterek kiszámolása és a vágások utáni szeletválasztások nem számítanak vágásnak, hiszen azok nem a vágások helyéről döntenek. Jelölje $D(k, n)$ a vizsgált k -személyes tortaosztó algoritmus maximális vágásszámát, ahol $n = \sum_{i \in I} d_i$. Egyenlő részesedések (azaz arányos osztozkodás) esetén ezt a vágásszámot jelölje $D(k)$.

3. Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus

A *Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus* arányos osztozkodást eredményez, amely bizonyos feltételek mellett szigorúan arányos. A módszer a már ismertetett Oszd Meg és Uralkodj Algoritmus módosítása, mely elhagyja a kitüntetett passzív játékos szerepét. Ezenkívül megköveteli, hogy minden játékos mértéke együttesen abszolút folytonos legyen a Lebesgue-mértékre nézve. Ez abban egészíti ki az eddigi mértékre tett megköveteléseinket, hogy ha egy halmaznak Lebesgue-mérték szerinti pozitív mértéke van, akkor minden játékos úgy gondolja, hogy a saját mértéke szerint is pozitív mértékű. A fejezet végén bemutatjuk, hogy ezek a módosítások nagyságrendben nem változtatnak az Oszd Meg és Uralkodj Algoritmus vágásszámán, vagyis a Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus nagyságrendben optimális marad, és egy nem túl szigorú feltétel teljesülése esetén szigorúan arányosan oszt.

Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus

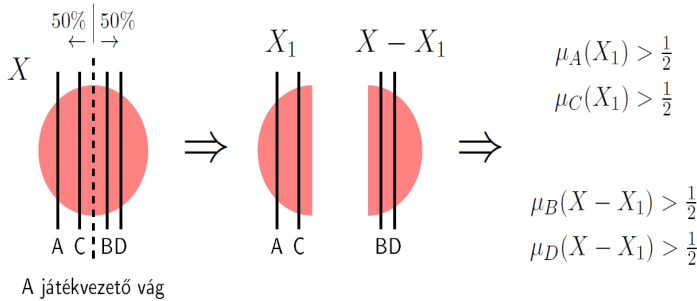
Tegyük fel, hogy minden játékos mértéke együttesen abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve.

Ha $k = 1$, akkor az egyetlen játékos megkapja a teljes tortát.

Ha $k \geq 2$, akkor minden játékos jelölje be a tortán egy függőleges, a többiekéhez képest párhuzamos vonallal, hogy hol vágná el a tortát $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor : \lceil \frac{k}{2} \rceil$ arányban. A játékvezető balról a $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ -dik és a $(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1)$ -dik jelölés között elvágja a tortát úgy, hogy e két jelölés közti szeletet felezze Lebesgue-mérték szerint.

A vágás bal oldalán lévő szeletet balról számolva az első $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ játékosnak, a jobb oldalán lévő szeletet pedig a maradék $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ játékosnak adja további osztozkodásra. Ha valamelyik vágásra több játékos jelölése esik, akkor a játékvezető tetszés szerint ossza őket az egyes oldalakra úgy, hogy a továbbosztozkodó játékosok száma megfelelő legyen. A bal oldali szeleten a megfelelő játékosok folytatják az osztozkodást az $\ell = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ -személyes algoritmussal, a jobb oldali szeleten pedig egy $m = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ -személyes változatot játszanak majd le.

3.1. Példa. Alice, Bob, Charlie és Dave osztozkodnak a tortán. Minden játékos megjelöli a tortát ott, ahol elfelezné. Tegyük fel, hogy a következő sorrendben látjuk a játékosok jelöléseit balról jobbra: Alice, Charlie, Bob és Dave. Ekkor a játékvezető Charlie és Bob jelölése között elvágja a tortát vigyázva arra, hogy e két jelölése közötti részt Lebesgue-mérték szerint felezzé. A bal oldali szeletet Alice-nek és Charlie-nak adja, a jobb oldalit pedig Bobnak és Dave-nek. Ezzel a négy személyes problémát kettő kétszemélyesre szűkítettük. Az 1. ábra illusztrálja a példában elvégzett osztozkodást.



1. ábra. A BEA futása négy személy esetén.

A Boldogság az Egyenjogságban Algoritmusról könnyen belátható, hogy arányos osztozkodást valósít meg. Az algoritmus párhuzamos vágásokkal szeleteli fel a tortát, ezért a játékosok jelölései balról jobbra megszámozhatóak az I indexhalmazzal. Ekkor egy $\pi : I \rightarrow I$ permutáció határozza meg, hogy a játékosok milyen sorrendben jelölték meg a tortát:

$$\pi(i) = j \Leftrightarrow \text{az } i. \text{ jelölést } P_j \text{ tette le.}$$

3.1. TÉTEL. *Ha egy játékos más helyen jelöli meg a tortát bármelyik jelölés-kor, mint a többi $k-1$ játékos, akkor a Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus garantálja számára a szigorúan nagyobb, mint $\frac{1}{k}$ részt. Ha minden játékosra igaz, hogy legalább egyszer nem az ő jelölése mentén vágta el egy szeletet, akkor a Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus szigorúan arányos osztozkodást produkál.*

Bizonyítás. Legyen $\ell := \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Tegyük fel, hogy a játékvezető az első vágást az ℓ . vágás mentén ejtette. Legyen a vágás bal oldalán lévő szelet X_B . Ekkor pontosan tudjuk, hogy $P_{\pi(\ell)}$, vagyis az ℓ . jelölést tevő játékos mekkorának tartja az X_B szeletet:

$$\mu_{\pi(\ell)}(X_B) = \frac{\ell}{k}. \quad (8)$$

Megjegyezhetjük, hogy az ℓ . jelölés menti vágás azt jelenti, hogy balról az ℓ . és $(\ell+1)$. jelölések egybeesnek, vagyis $P_{\pi(\ell+1)}$ játékos is ugyanazt gondolja a bal oldali szeletről, mint $P_{\pi(\ell)}$. Sőt, előfordulhat, hogy több mint két játékos jelölése esett egybe a vágással, ekkor a játékvezető megfelelő számú játékost sorsol a bal és a jobb oldalra.

Az X_B szeleten a vágás után a $P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}, \dots, P_{\pi(\ell)}$ játékosok osztozkodnak tovább. Ekkor a $P_{\pi(\ell)}$ játékos részesedése az X_B szeletből $\frac{1}{\ell}$, az X_B szeletet pedig $\frac{\ell}{k}$ nagyságúnak tartja. Ha megkapja az X_B szeletből a részesedését, akkor számára a saját szelete legalább $\frac{1}{\ell} \cdot \frac{\ell}{k} = \frac{1}{k}$ értékű, vagyis megkapta legalább az arányos részét a teljes tortából. Ha a vágásra ezek közül a játékosok közül többek jelölése esett, azokra ugyanez levezethető.

De mi történik a többiekkel? Ha $P_{\pi(i)}$ egy bal oldalra osztott játékos ($i \in \{1, 2, \dots, \ell-1\}$), és az adott körben tett jelölése nem esik az akkori vágásra, akkor a jelölése és a vágás között van egy pozitív Lebesgue-mértékű halmaz. Mivel a saját mértéke együttesen abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve, így ő is pozitív mértékűnek látja ezt a köztes halmazt, vagyis $\exists \varepsilon > 0$, hogy:

$$\mu_{\pi(i)}(X_B) = \frac{\ell}{k} + \varepsilon. \quad (9)$$

Hasonló érvényes a $P_{\pi(\ell+1)}, P_{\pi(\ell+2)}, \dots, P_{\pi(k)}$ játékosokra és a jobb oldali szeleten történetekre. Tehát mindenki, akinek a jelölése nem esik első körben a vágásra, szigorúan többet kap a tortából, mint az arányos része.

Az előzőek általánosíthatók, ha minden körben az új szeletek értékét normáljuk. Ezzel az általánosítással megállapíthatjuk, hogy ha egy játékos mindenki mástól különbözőképpen jelöli meg a tortát bármelyik körben, akkor biztosan nem a jelölése mentén vágnak, vagyis az (9) egyenletben leírtak alapján szigorúan többet fog kapni az arányos részénél.

Ezek alapján pedig ha mindenkire igaz, hogy legalább egyszer más helyen jelölte meg a tortát, mint többiek, akkor az osztozkodás szigorúan arányos. \square

A Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus leírása alapján a vágásszámra rekurziós formulát definiálhatunk. Ha k személy osztozkodik a tortán, akkor a legelső körben mindenki megjelöli, hogy hol vágná el. Mivel ezek mind vágásokkal kapcsolatos döntések, amik befolyásolhatják a vágás fizikai helyét, beleszámítanak a vágásszámba. A játékevezető lépései, a fizikai vágás és a játékosok szétosztása nem számítanak bele. A vágás után pedig két, kevesebb résztvevős tortaosztást kell majd végigjátszaniuk a megfelelő játékosoknak, tehát a rekurziós formula a következőképpen írható fel az alsó és felső egészrész függvények segítségével:

$$D(k) = k + D\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right) + D\left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil\right). \quad (10)$$

3.2. TÉTEL. *A k -személyes Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus vágásszáma rekurzív formulájának zárt alakja*

$$D(k) = k \cdot \lceil \log_2 k \rceil - 2^{\lceil \log_2 k \rceil} + k. \quad (11)$$

Bizonyítás. A Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus az Oszd meg és Uralkodj Algoritmus egy egyszerű módosításával született, és előbbi vágásszámát egyszerűen megkapjuk utóbbi vágásszámából (a levezetés Robertson és Webb könyvében megtalálható [2, 3]). A passzív játékos elkerülése a Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmusban azt eredményezi, hogy minden egyes körben (jelöléskor) plusz egy vágást ejtünk. Az Oszd Meg és Uralkodj Algoritmus vágásszáma tehát

$$D(k) = k \cdot \lceil \log_2 k \rceil - 2^{\lceil \log_2 k \rceil} + 1.$$

A k résztvevő esetén összesen k darab szeletre vágjuk a tortát, vagyis $k - 1$ darab fizikai vágást ejtünk. Ezt pedig pontosan $k - 1$ kör alatt érhetjük el, ami összesen $k - 1$ plusz vágást jelent az Oszd meg és Uralkodj Algoritmus vágásszámahoz képest. \square

Even és Paz [2] Oszd Meg és Uralkodj Algoritmus $\mathcal{O}(k \cdot \log k)$ vágással végzi el az arányos tortaosztást. Edmonds és Pruhs [1] belátta, hogy ez a vágásszám optimális a determinisztikus algoritmusok körében.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *A determinisztikus Boldogság az Egyenjogúságban Algoritmus vágásszáma $\mathcal{O}(k \cdot \log k)$ nagyságrendű, vagyis optimális.*

4. Részvénytársaság Felosztás Algoritmus

Ebben a fejezetben áttérünk a nem egyenlő részesedések melletti arányos osztozkodási feladatra, azaz amikor a játékosok részesedése a tortából egymáshoz képest különböző. Az itt definiált algoritmus természete miatt célszerű újrafogalmazni az eddigi tortaosztással kapcsolatos fogalmakat. Ezentúl a C részvénytársaság reprezentálja a tortát, P_i játékosok pedig a vállalat részvényesei lesznek

d_i részesedéssel ($i \in I = \{1, 2, \dots, k\}$). A részesedések összege $n = \sum_{i \in I} d_i$, jelölje ezentúl a C vállalat részvényeinek számát, valamint a teljes C részvénytársaság érjen minden játékosnak 1-et. Így a részvényesek $\frac{1}{n}$ értékűnek tartják a vállalat minden részvényét.

Az eljárás során a C részvénytársaságot C^1, C^2, \dots, C^m részvénytársaságokra vágjuk (rendre n^1, n^2, \dots, n^m részvénnel), ahol $\sum_{j=1}^m n^j = n$. Egy P_i részvényes akkor tartja *jövedelmezőbbnek* a C^j vállalatot, ha egy részvény értéke C^j -ben legalább annyit ér számára, mint egy részvény C -ben, azaz ha

$$\frac{\alpha}{n^j} \geq \frac{1}{n}, \text{ ahol } \alpha = \mu_i(C^j) \in]0, 1[. \quad (12)$$

Ezek alapján P_i *jövedelmezőbbnek* tartja a C^j vállalatot bármelyik másikhoz képest, ha számára többet ér egy C^j -beli részvény, mint egy részvény a másik vállalatból. Célunk, hogy minden C^j vállalat pontosan egy részvényes tulajdonában legyen, és minden P_i részvényes pontosan d_i részvénnel rendelkezzen az osztzkodás végére, vagyis

$$\forall i \in I : d_i = \sum_{J_i \subset J} n^j, \text{ ahol } \bigcup_{i \in I} J_i = J \quad (13)$$

Bemutatjuk az ismert Közel Felező Algoritmus egy k -személyes általánosítását, a Részvénytársaság Felosztás Algoritmust, amellyel a fent említett $\{C^j\}_{j \in J}$ felosztás elkészíthető. Az algoritmus alapjaként a következőkben megfogalmazott Részvénytársaság Szétválasztás szubrutin szolgál, amely kettévág egy részvénytársaságot, majd a játékosok a számukra jövedelmezőbb oldalra próbálnak helyezkedni a részvényeik cserélgetésével. A szubrutint újra alkalmazzuk azokra a kisebb vállalatokra, melyeknek még legalább két tulajdonosa van.

A Részvénytársaság Felosztás Algoritmus bemenete maga a $\{C\}$ vállalat és egy $(d_1, d_2, \dots, d_k)^T$ részesedési lista, amely az osztzkodó P_1, P_2, \dots, P_k játékosok részesedését reprezentálja a C vállalatban. Az algoritmus kimenete egy $\mathcal{C} = \{C^1, C^2, \dots, C^m\}$ felosztás és egy $\mathcal{D} \in \mathbb{N}^{k \times m}$ mátrix, melynek d_i^j (i . sor, j . oszlopbeli) eleme megmutatja, hogy a P_i játékos mekkora arányban részesül a C^j vállalatból, ahol a C^j vállalati részvények száma $n^j = \sum_{i \in I} d_i^j$.

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} d_1^1 & d_1^2 & \dots & d_1^m \\ d_2^1 & d_2^2 & \dots & d_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_k^1 & d_k^2 & \dots & d_k^m \end{bmatrix} \in \mathbb{N}^{k \times m}. \quad (14)$$

4.1. KÖVETKEZMÉNY. Mivel az Részvénytársaság Felosztás Algoritmus végén minden C^j vállalatnak egy tulajdonosa van, így tudjuk, hogy \mathcal{D} minden oszlopában pontosan egy elem nem 0. Ez nem mondható el a sorokról, hiszen egy játékosnak lehet több vállalata is: az i . sort összegezve d_i -t kapunk.

A Részvénytársaság Szétválasztás szubrutin bemenete egy $\{C^j\}$ tortaszelet és egy $(d_1^j, d_2^j, \dots, d_k^j)^T$ lista, amely az osztozkodó P_1, P_2, \dots, P_k játékosok részesedését reprezentálja a C^j vállalatban (a mátrix j . oszlopa). Az szubrutin kimenete a C^j vállalat egy felosztása: egy C^* és egy C^{**} vállalat, rendre $(d_1^*, d_2^*, \dots, d_k^*)$ és $(d_1^{**}, d_2^{**}, \dots, d_k^{**})$ részesedési listákkal, melyekre teljesül, hogy minden $i \in I$: $d_i^* + d_i^{**} = d_i^j$. Ha a vállalatnak (amit bemenetként adtunk) csak egy tulajdonosa van, akkor a szubrutin visszaadja a bemenetet (vagyis C^{**} nem feltétlenül létezik). A szubrutin kimenetét a Részvénytársaság Felosztás Algoritmus beilleszti a saját C halmazába és D mátrixába, és ekkor a csillagok helyére a megfelelő indexek kerülnek.

Részvénytársaság Felosztás (RTF) Algoritmus

BEMENET: $C = \{C\}$ és $D = (d_1, d_2, \dots, d_k)^T$.

Meghívjuk a Részvénytársaság Szétválasztás szubrutint: $RTSzV(C, D)$.

A kimenetet feldolgozzuk: $C = \{C^1, C^2\}$, és a $(d_1^1, d_2^1, \dots, d_k^1)^T$ és $(d_1^2, d_2^2, \dots, d_k^2)^T$ részesedési listák lesznek a D mátrix oszlopai. Az $RTSzV(C^1, (d_1^1, d_2^1, \dots, d_k^1)^T)$ és $RTSzV(C^2, (d_1^2, d_2^2, \dots, d_k^2)^T)$ szubrutinok közül meghívjuk azokat, melyeknek a bemenetként megadott részesedési listájában legalább két 0-tól különböző szám van.

Ha egy részesedési listában pontosan egy 0-tól különböző szám van, akkor az ahhoz tartozó vállalat egy ember tulajdonában van, és nem osztozkodnak tovább rajta.

REKURZÍÓ: A kimeneteket feldolgozzuk: a C halmazban minden C^j helyére a C^* és a C^{**} kimenetként kapott vállalatok kerülnek (megfelelő indexszel), a D mátrixból töröljük a $(d_1^j, d_2^j, \dots, d_k^j)^T$ listát, helyette pedig beillesztjük a $(d_1^*, d_2^*, \dots, d_k^*)^T$ és $(d_1^{**}, d_2^{**}, \dots, d_k^{**})^T$ listákat (megfelelő indexszel). A feldolgozás után meghívjuk azokat az $RTSzV(C^j, (d_1^j, d_2^j, \dots, d_k^j)^T)$ szubrutinokat (ahol $C^j \in C$), melyeknek a bemenetként megadott részesedési listájában legalább két 0-tól különböző szám van. Ha egy részesedési listában pontosan egy 0-tól különböző szám van, az ahhoz tartozó vállalat nem osztozkodnak tovább.

KIMENET: $\mathcal{C} = \{C^1, C^2, \dots, C^m\}$ felosztás és egy $\mathcal{D} \in \mathbb{N}^{k \times m}$.

A következőkben bemutatjuk a Részvénytársaság Szétválasztás szubrutint, ami az RTF algoritmus alapja.

Részvénytársaság Szétválasztás (RTSzV) szubrutin

BEMENET: C vállalat és $(d_1, d_2, \dots, d_k)^T$ részesedési lista.

Ha csak egy tulajdonosa van a C vállalatnak, akkor készen vagyunk. Egyébként tegyük fel, hogy P_ℓ a legnagyobb részesedéssel rendelkező játékos, vagy azok egyike. Ekkor $n = d_1 + d_2 + \dots + d_k$.

1.eset: Ha $d_\ell \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, akkor a P_ℓ játékos *közel felezi* a C vállalatot C^1 és C^2 vállalatokra, rendre $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ és $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ számú részvénnel, azaz $\frac{\mu_\ell(C^1)}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \frac{\mu_\ell(C^2)}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ teljesül (minden részvény egyenlő értékű P_ℓ -nek). A C^1 vállalatból minden P_i ($i \in I$) játékos $d_i \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \frac{1}{n}$ részvényt kap, a C^2 vállalatból pedig $d_i \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \frac{1}{n}$ részvényt. A C^1 és C^2 vállalat közül a P_ℓ játékoson kívül minden P_i játékos kiválasztja, hogy számára melyik *jövedelmezőbb*. (Ha minden részvény ugyanannyit ér P_i -nek, akkor tetszőlegesen választhat vállalatot.) Ezek után a játékosok elkezdene a P_ℓ játékosal *részvényeket cserélni*. Ha egy játékos jövedelmezőnek tart egy vállalatot, akkor a másik vállalatbeli részvényeit (akár törtszámú részvényt is) örömmel cserél jövedelmezőbbekre.

A részvéncsere addig tart, amíg minden játékosnak egész számú részvénye lesz mindkét vállalatban, és P_ℓ játékoson kívül mindenkinek már csak vagy C^1 -ben, vagy C^2 -ben vannak részvényei. (Ha a P_ℓ játékosnak túl nagy részesedése van a C vállalatból, akkor előfordulhat az az eset, hogy nem lehet csak egy oldalon részvénye.)

Ebben az esetben vagy redukáltuk a k -személyes problémát egy $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ és egy $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ részvénytartalmú, kevesebb résztvevős problémára, vagy csökkentettük P_ℓ részesedését.

2.eset: Ha $d_\ell < \lceil \frac{n}{2} \rceil$, akkor P_ℓ *pontosan felezi* a C vállalatot C^1 és C^2 vállalatokra, vagyis $\mu_\ell(C^1) = \mu_\ell(C^2) = \frac{1}{2}$ teljesül, a részvények pedig *inflálódnak*: mindkét vállalat n részvényt kap, és minden P_i játékos d_i részvényt kap mindkét vállalatból. Ekkor, ahogy az 1. esetben, minden játékos kiválasztja a jövedelmezőbb vállalatot, majd részvényeket cserélnek mindaddig, amíg valamely játékosnak lehetősége van, hogy egy részvényt jövedelmezőbb részvényre cseréljen.

Ebben az esetben redukáltuk a k -személyes problémát két, legfeljebb $(k - 1)$ -személyes problémára, hiszen minden esetben van egy P_i játékos (legrosszabb esetben P_ℓ), akinek elég részvénye van ahhoz, hogy a legkisebb részesedéssű játékosal addig cseréljen, amíg annak csak jövedelmező részvénye marad. Ezenkívül a P_i játékos is tud addig cserélni, amíg csak jövedelmezőbb részvénye van, különben nem ebben az esetben lennének.

Megjegyezzük, hogy $k = 2$ személyre az RTF algoritmus 2. esete nem fordulhat elő, vagyis a kétszemélyes algoritmus ekvivalens a Közel Felező Algoritmussal.

4.1. ÁLLÍTÁS. Az RTSzV szubrutin 1. esetében a vágó P_ℓ játékosnak mindig van elég részvénye, hogy addig cseréljen, amíg minden játékosnak csak az egyik vállalatban van egész számú részvénye.

Bizonyítás. Mindkét új vállalatához egész számú részvény tartozik, és ebből következik, hogy kaphatunk kimenetként egészelemű részesedési listákat.

A legrosszabb eset, ha a P_ℓ vágó játékoson kívül mindenki ugyanazt a vállalatot tartja jövedelmezőbbnek, és ennek a vállalatnak $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ részvénye van, ugyanis ekkor van szüksége a P_ℓ játékosnak a legtöbb részvényre a másik vállalatból. Ezek alapján teljesülnie kell a következő egyenlőtlenségnek, hogy mindig elég részvénye legyen a P_ℓ játékosnak:

$$\begin{aligned} d_\ell \cdot \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} &\geq (n - d_\ell) \cdot \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} \\ d_\ell \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &\geq (n - d_\ell) \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - d_\ell \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ d_\ell \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + d_\ell \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil &\geq n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ d_\ell \cdot n &\geq n \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ d_\ell &\geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

Vagyis megkaptuk azt a feltételt, ami alapján a szubrutin 1. esetébe kerültünk. \square

4.2. ÁLLÍTÁS. Az RTSzV szubrutin 2. esetében mindegyik vállalatnak legalább eggyel kevesebb tulajdonosa lesz, mint az eredetiben volt.

Bizonyítás. Legyen a legkevesebb részesedéssel rendelkező játékos P_m . Mivel nem egyenlő részesedésekkel dolgozunk, így lesz legalább egy játékos (aki akár a P_ℓ vágó játékos is lehet), akinek a részesedése több, mint a P_m játékosé. A nagyobb részesedéssel rendelkező tud annyi részvényt adni P_m -nek, hogy csak egy vállalatnál legyen részvénye.

A legrosszabb eset, amikor a P_ℓ játékoson kívül minden játékos ugyanazt a vállalatot tartja jövedelmezőbbnek. Ellenkező esetben a P_ℓ játékoson kívüli P_i játékosok ($i \neq \ell$) elkezdik a részvéncseréket, és a P_ℓ játékos részvényeire csak részben van szükség ahhoz, hogy teljesüljön az állítás. Megmutatjuk, hogy a P_ℓ játékos a legrosszabb esetben el tudja cserélni a mindenki által jövedelmezőbbnek tartott vállalati részvényeit, és ezzel a P_m és P_ℓ játékosok teljesítik a feltételt. Az esetszétválasztás szerint akkor vagyunk a 2. esetben, ha $d_\ell < \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Ekkor $n - d_\ell \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, és pontosan $n - d_\ell$ részvény kellene a P_ℓ vágó játékosnak, hogy részvéncserélés során mindenki másnak csak a jövedelmezőbb oldalon legyen részvénye, de a feltevés miatt ennyi nincs neki. Tehát meg tudjuk oldani, hogy a P_ℓ játékos részvényei elfogyjanak a jövedelmezőbb vállalatban. \square

4.3. ÁLLÍTÁS. *Az RTSzV szubrutin során a játékosok arányosan osztozkodnak. Következésképpen az RTF algoritmus kimenete arányos felosztást szolgáltat.*

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy az RTSzV szubrutin végrehajtása során egyetlen játékos vagyona sem csökken, azaz a $\sum_j \mu_i(C^j) \cdot d_i^j$ mennyiség legalább akkora a szubrutin végrehajtása után, mint amekkora az előtt volt minden i esetén. Az RTSzV szubrutin két lépésből áll: először egy C^j vállalatból egy C^* és egy C^{**} vállalat keletkezik. Ennek során az i . játékos vagyonának változása $\mu_i(C^*) \cdot d_i^j + \mu_i(C^{**}) \cdot d_i^j - \mu_i(C^j) \cdot d_i^j = d_i^j \cdot (\mu_i(C^*) + \mu_i(C^{**}) - \mu_i(C^j)) = d_i^j \cdot (\mu_i(C^j) - \mu_i(C^j)) = 0$.

Ha a szubrutin második részében végrehajtott részvéncsere során mondjuk az i . játékos a C^* vállalatban ε mennyiségű részvényét elcseréli ugyancsak ε mennyiségű részvényre a C^{**} vállalatban, akkor teljesül, hogy $\mu_i(C^*) \leq \mu_i(C^{**})$. Az i . játékos vagyonának változása tehát $\varepsilon \cdot (\mu_i(C^{**}) - \mu_i(C^*)) \geq 0$, így a részvéncsere során sem csökkenhet egyetlen játékos vagyona sem.

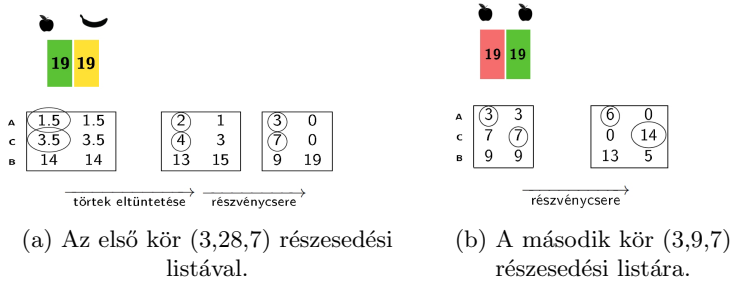
Tekintettel arra, hogy a játékosok vagyona kizárólag az RTSzV szubrutin során változhat az RTF algoritmus futása során, ezért az algoritmus kimeneteként kapott felosztásban az i . játékos vagyona legalább akkora lesz, mint amekkora az eredeti részesedése volt, azaz legalább d_i . Nekünk pedig éppen ezt kellett igazolnunk. \square

4.1. Példa. Alice, Bob és Charlie részesedése a Gyümölcs vállalatból rendre (3, 28, 7). A felosztáskor Bob vág először, mert övé a legnagyobb részesedés a vállalati részvényekből. Mivel $n = 38$, és $d_B \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil = 19$, Bob közel felezi a Gyümölcs vállalatot két, 19 részvénnel rendelkező részre, az Alma és Banán vállalatokra. A vágás után Alice és Charlie jövedelmezőbb oldalt, mondjuk az Alma vállalatot választják, lásd a 3. ábra (A) részén. A törtek eltüntetése után Alice 2 Alma és 1 Banán, Bob 13 Alma és 15 Banán, Charlie pedig 4 Alma és 3 Banán részvénnel rendelkezik. A részvéncsere után Bob megkapja a teljes Banán vállalatot, hiszen már csak ő a tulajdonosa. A részesedése ezzel csökken, és folytatják az osztozkodást (3,9,7) részesedési listával. A vágó játékos ismét Bob lesz. Mivel $n = 19$, és

$d_B < \lceil \frac{n}{2} \rceil = 10$, Bobnak nincs elég részvénye a közel felező esethez, ezért pontosan felez, és a részvények inflálódnak, lásd a 3. ábra (B) részén. A részvénytársaság után redukáltuk a problémát két darab kétszemélyes problémára, és innentől a Közel Felező Algoritmust használhatjuk külön-külön a két vállalatra.

részeseések		(3, 8)		(3, 2)		(1, 2)		(1, 1)	
vállalatok		<div><div>5</div><div>6</div></div>		<div><div>2</div><div>3</div></div>		<div><div>1</div><div>2</div></div>		<div><div>1</div><div>1</div></div>	
törtek	A	15/11	18/11	6/5	9/5	1/3	2/3	0.5	0.5
	B	40/11	48/11	4/5	6/5	2/3	4/3	0.5	0.5
eltüntetésé	A	2	1	2	1	0	1	1	0
	B	3	5	0	2	1	1	0	1
részvénycsere	A	3	0						
	B	2	6						
kiosztott részek	A			{2}		{2}		{2}, {1}	
	B	{6}		{6}		{6}, {1}		{6}, {1}, {1}	

2. ábra. A Gyümölcs vállalat egy kétszemélyes felosztása (3,8) részesedési listával.



3. ábra. Redukciós lépések a háromszemélyes RTF algoritmusban (3,28,7) részesedési listával.

4.1. TÉTEL. Ha $k \geq 2$, $n \geq 3$, és $n > k$, akkor a k -személyes Részvénytársaság Felosztás Algoritmus, melyben a résztvevők részesedéseinek összege n , felülről becsülhető a következőképpen:

$$D(k, n) \leq (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 n \rceil + 1. \quad (15)$$

Speciálisan, ha $k = 2$, akkor

$$D(2, n) = \lceil \log_2 n \rceil.$$

Bizonyítás. Ha $k = 2$, akkor az algoritmusunk megegyezik a Közel Felező Algoritmussal, vagyis a vágásszámuk is megegyezik [3].

Hajtsunk végre indukciót a lexikografikus rendezett (k, n) párokon. Az algoritmus leírását követve az alábbi felső becslést adhatjuk $D(k, n)$ -ra:

$$D(k, n) \leq 1 + \max \left\{ 2 \cdot D(k-1, n); D(k, \lceil \frac{n}{2} \rceil); \right. \\ \left. \left\{ D(k-i+1, \lceil \frac{n}{2} \rceil) + D(i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \quad \forall i = 2, 3, \dots, \lceil \frac{k+1}{2} \rceil \right\} \right\}.$$

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a tételt, be kell látnunk a következőt:

$$1 + \max \left\{ 2 \cdot D(k-1, n); D(k, \lceil \frac{n}{2} \rceil); \right. \\ \left. \left\{ D(k-i+1, \lceil \frac{n}{2} \rceil) + D(i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \quad \forall i = 2, 3, \dots, \lceil \frac{k+1}{2} \rceil \right\} \right\} \leq \\ \leq (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 n \rceil + 1.$$

Használjuk a tételbeli (15) felső becslést a maximumbeli elemekre. Egyszerűen belátható, hogy a legtöbb elhagyható közülük, mert $D(k, \lceil \frac{n}{2} \rceil)$ felső becslésével őket is felülről becsüljük. Írjuk fel a tételbeli (15) felső becslést $D(k, \lceil \frac{n}{2} \rceil)$ -ra:

$$D(k, \lceil \frac{n}{2} \rceil) \leq (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil + 1. \quad (16)$$

Minden $i \in \{2, 3, \dots, \lceil \frac{k+1}{2} \rceil\}$ indexre felírható a következő:

$$D(k-i+1, \lceil \frac{n}{2} \rceil) + D(i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \leq \\ \leq (2^{k-i} - 1) \cdot \lceil \log_2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil + 1 + (2^{i-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil + 1 \\ = (2^{k-i} + 2^{i-1} - 2) \cdot \lceil \log_2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil + 2,$$

és felülről becsülhetjük az egyenlőtlenség jobb oldalát az előzőekben felírt (16) felső becsléssel, majd rendezhetjük:

$$(2^{k-i} + 2^{i-1} - 2) \cdot \lceil \log_2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil + 2 \leq (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil + 1 \\ \frac{1}{\lceil \log_2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil} \leq (2^{k-1} - 2^{k-i} - 2^{i-1} + 1) = (2^{k-i} - 1) \cdot (2^{i-1} - 1) \quad (17)$$

Mivel $n \geq 3$ esetén az előző (17) egyenlőtlenség bal oldalán mindig 1-nél nem nagyobb, a jobb oldalán pedig 1-nél nem kisebb tényezőket szorzunk, a tételbeli (15) felső becsléssel a következőt kapjuk:

$$D(k, n) \leq 1 + \max \left\{ 2 \cdot D(k-1, n); D(k, \lceil \frac{n}{2} \rceil) \right\}.$$

Ahhoz, hogy a tételbeli (15) felső becslés mindig igaz legyen, a következő két egyenlőtlenséget kell még belátnunk:

$$1 + 2 \cdot D(k-1, n) \leq (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 n \rceil + 1, \quad (18)$$

$$1 + D(k, \lceil \frac{n}{2} \rceil) \leq (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 n \rceil + 1. \quad (19)$$

Becsüljük felülről az előzőekben felírt (18) egyenlőtlenség bal oldalát, hogy eljussunk a jobb oldaláig:

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cdot D(k-1, n) &\leq 1 + 2 \cdot [(2^{k-1-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 n \rceil + 1] = \\ &= 3 + (2^{k-1} - 2) \cdot \lceil \log_2 n \rceil \\ &= (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 n \rceil + 1 - \underbrace{\lceil \log_2 n \rceil + 2}_{\leq 0 \text{ } (\forall n \geq 3)} \\ &\leq 0 \text{ } (\forall n \geq 3) \end{aligned}$$

Valamint becsüljük felülről az előzőekben felírt (19) egyenlőtlenség bal oldalát, hogy eljussunk a jobb oldaláig, és közben használjuk ki, hogy $\forall x \in \mathbb{R} : \lceil \log_2 \lceil x \rceil \rceil = \lceil \log_2 x \rceil$:

$$\begin{aligned} 1 + D(k, \lceil \frac{n}{2} \rceil) &\leq 1 + (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil + 1 = \\ &= 1 + (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ &= 1 + (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 n - \log_2 2 \rceil + 1 \\ &= 1 + (2^{k-1} - 1) \cdot (\lceil \log_2 n \rceil - 1) + 1 \\ &= (2^{k-1} - 1) \cdot \lceil \log_2 n \rceil + 1 - \underbrace{2^{k-1} + 2}_{\leq 0 \text{ } (\forall k \geq 2)} \\ &\leq 0 \text{ } (\forall k \geq 2) \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy a tételbeli (15) felső becslés mindig elegendő vágás lesz.

□

Köszönetnyilvánítás

Jelen munka az OTKA K108383 és az MTA KEP-6/2017 sz. kutatási projekt támogatásával készült. Továbbá köszönettel tartozunk a lektornak, az MTA Mechanizmus tervezés kutatócsoportjának és Tasnádi Attilának.

Hivatkozások

- [1] JEFF EDMONDS AND KIRK PRUHS: *Cake cutting really is not a piece of cake*, ACM Transactions on Algorithms (TALG), Vol. **7** No. **4**, p. 51 (2011).
- [2] SHIMON EVEN AND AZARIA PAZ: *A note on cake cutting*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **7** No. **3**, pp. 285-296 (1984).
- [3] JACK ROBERTSON AND WILLIAM WEBB: *Cake-cutting algorithms: Be fair if you can*, p. 177 (1998).
- [4] ATTILA TASNÁDI: *Igazságos elosztások*, Budapesti Corvinus Egyetem, Typotex, p. 147 (2014).



Fleiner Tamás 1971-ben született Budapesten. A budapesti Fazekas Gimnázium speciális matematika tagozatán tett érettségit követően szerzett okleveles matematikus diplomát az ELTÉ-n, majd az amszterdami CWI-ben töltött 4 év után "Stable and crossing structures" című disszertációját az eindhoveni TU/e egyetemen 2000-ben védte meg. Egy évig az MTA RAM-KI fiatal kutatója, majd Magyary Zoltán poszt-doktori ösztöndíjas az ELTE Operációkutatási Tanszékén. 2003-tól Bolyai-ösztöndíjasként a BME Számítástudományi és Információelméleti

Tanszékén adjunktus, 2006-tól docens, 2014-ben pedig habilitál. Kutatási területe a diszkrét matematika és közgazdaságtan határterülete, 65 tudományos közlemény szerzője, több mint 300 független hivatkozással. Több OTKA-pályázat témavezetője, nemzetközi kutatások résztvevője, a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny szervezőbizottságának elnöke. Jelenleg a BME-n és az AIT-n oktat, társasházi közös képviselő, műkedvelő kerékpár- és varrógépműszerész, valamint gerillakertész.

FLEINER TAMÁS

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
1117 Budapest, Magyar tudósok körútja 2., I épület, IB132
fleiner@cs.bme.hu



Romsics Erzsébet Kalocsán született 1994. július 10-én, jelenleg Budapesten él. A gimnáziumi tanulmányait a kalocsai Szent István Gimnáziumban végezte, majd alapszakos diplomát szerzett a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem matematika alapszakán 2016-ban. Jelenleg is az egyetem matematikus mesterszakán tanul. Az alapszakos témavezetője Fleiner Tamás volt, jelenleg pedig Biró Péter, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tagja. Az egyetem alatt több tanszéken töltött be demonstrátori pozíciót, javában mérnöki matematika tárgyakat oktatott. 2016-ban az igazságos tortaosztásról írt dolgozata első helyezést ért el az egyetemi tudományos konferencián. Kisebb feladatokban részt vett az MTA Mechanizmustervezés Kutatócsoport munkájában

2017-ben, majd 2018-tól az MTA Tudánypolitikai és Tudományelemzési Osztályával dolgozik együtt egy hálózatalméleti projekten. 2017-ben a BME Természettudományi Kara a 'Kar Kiváló Hallgatója' díjat adományozta neki.

ROMSICS ERZSÉBET

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Sztocasztika Tanszék
1111 Budapest, Eötvös József u. 1.
romsics.csore@gmail.com

ALGORITHMS FOR CAKE CUTTING WITH EQUAL AND UNEQUAL SHARES

TAMÁS FLEINER, ERZSÉBET ROMSICS

An unceasing problem of our prevailing society is the fair division of goods. The problem of fair cake cutting is dividing a heterogeneous and divisible resource, the cake, among k players who value pieces according to their own measure function. The goal is to assign each player a not necessarily connected part of the cake that the player evaluates at least as much as her equal fair share.

In this paper, we present two new algorithms. Our first algorithm guarantees a piece strictly larger than $\frac{1}{k}$ of the whole cake for certain measure functions. In the second setting, we investigate the problem of unequal shares, where each player needs to be assigned a piece that she evaluates at least as much as her predefined fair share. We present an algorithm that delivers such a solution and in some cases, runs faster than all known algorithms. In both problems, we establish upper bounds on the number of cuts our algorithms execute.

KÉTKISZOLGÁLÓS, NEM NÖVEKVŐ, EGYSZERŰ, LINEÁRIS TORLÓDÁSI JÁTÉKOK PUHA KORRELÁLT EGYENSÚLYÁNAK KÉNYSZERÍTÉSI ÉRTÉKÉRŐL

FORGÓ FERENC

Prékopa András emlékére

Becslést adunk a puha korrelált egyensúly (Forgó F (2010) *Mathematical Social Sciences* 60:186-190) kényszerítési értékére (Ashlagi I, Monderer D and Tennenholtz M (2008) *Journal of Artificial Intelligence* 33:575-613) a kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok osztályán. Az alsó korlát 1,125, a felső korlát 1,265625. A felső korlát lényegesen jobb az eddig ismert 1,333-nál.

1. Bevezetés

A korrelált egyensúly (correlated equilibrium *CE*) fogalmát Aumann [3] vezette be mint a Nash-egyensúly (Nash equilibrium *NE* [14], [15]) általánosítását. Véges játékok korrelált egyensúlyát többféleképpen is lehet definiálni, illetve interpretálni. Matematikai precizítással a korrelált egyensúlyt a stratégiaprofilokon adott olyan valószínűségeloszlásként definiáljuk, amely egy lineáris egyenlőtlenségrendszer lehetséges megoldása. Az egyenlőtlenségeket ösztönző feltételeknek nevezzük és a véges játék kifizető függvényéből konstruáljuk. Az ösztönző feltételek megértéséhez az Aumann által megadott interpretáció segít a legjobban, ami tulajdonképpen egy forgatókönyv, amelyet egy játékvezetőnek és a játékosoknak követniük kell, mielőtt a játékot magát lejátszzák. A forgatókönyv szerint a játékvezető egy adott és minden résztvevő által ismert valószínűségeloszlás szerint kisorsol egy stratégiaprofil. Utána minden játékosnak külön-külön javasolja, hogy játssza a kisorsolt stratégiaprofilból a saját részét. Minden játékosnak szabad választása van abban, hogy elfogadja-e a javaslatot, vagy pedig valami más stratégiát játszik. A valószínűségeloszlást korrelált egyensúlynak nevezzük, ha abban az esetben, ha mindenki elfogadja a játékvezető ajánlását, akkor senki sem tudja a várható kifizetését (hasznosságát) növelni azzal, hogy nem fogadja meg a játékvezető tanácsát. Ezáltal a társadalmi hasznosság (social welfare *SW*), amit általában

a játékosok hasznosságának összegével (vagy ami ezzel ekvivalens, az átlagos hasznossággal) mérünk, nagyobb lehet, mint bármelyik Nash-egyensúlyban. Vannak azonban olyan játékok (pl. a fogoly dilemma), amikor a korrelált egyensúly nem tud nagyobb társadalmi hasznosságot produkálni, mint a legjobb Nash-egyensúly. Aumann adott egy másik interpretációt is [4], amelyben a korrelált egyensúlyt a bayesi racionalitás megtestesülésének tartja.

A korrelált egyensúly általánosításai általában azt a célt tűzik ki, hogy az egyensúly megtartása mellett nagyobb társadalmi hasznosságot lehessen elérni, mint a korrelált egyensúllyal. Ezt a célt a forgatókönyv megváltoztatásával érik el. Ennek azonban ára van. A játékosok részéről erősebb elkötelezettséget követelünk meg. Moulin és Vial [13] vezette be a gyenge korrelált egyensúly fogalmát (coarse correlated equilibrium *CCE*). A játékosoknak el lehet kötelezni magukat arra, hogy vakon követik a játékvezető javaslatát. Ha nem kötelezik el magukat, akkor szabadon választhatnak bármilyen stratégiát. A gyenge korrelált egyensúly egy olyan valószínűségeloszlás, amely mellett senki sem jut nagyobb kifizetéshez az elkötelezettség megtagadásával, feltéve, hogy mindenki más elkötelezte magát. Vannak példák, sőt egész játékosztályok [10],[11],[12],[13], ahol a gyenge korrelált egyensúly jobban „teljesít”, mint a korrelált egyensúly. A puha korrelált egyensúly (soft correlated equilibrium *SCE*) [6] egy másik általánosítása a korrelált egyensúlynak. A puha korrelált egyensúly forgatókönyve „kicsit” különbözik a gyenge korrelált egyensúly forgatókönyvétől. Ha egy játékos nem akarja elkötelezni magát, akkor bármelyik stratégiát választhatja, kivéve azt, amelyet a játékvezető javasolt volna neki, ha elkötelezte volna magát. Mind a gyenge, mind a puha korrelált egyensúly a korrelált egyensúly általánosítása, de egyik sem általánosítása a másiknak. Vannak azonban olyan játékosztályok, ahol a puha korrelált egyensúly általánosítása a gyenge korrelált egyensúlynak. Egy fontos példa a bináris játékok osztálya, ahol mindegyik játékos stratégiáihalmaza két elemű.

Ebben a dolgozatban a puha korrelált egyensúly „teljesítményét” szeretnénk mérni egy adott C játékosztályban. Ehhez egy olyan mérőszámot használunk, amely azt hivatott megmutatni, hogy milyen mértékben tudja a „legjobb” puha korrelált egyensúly által biztosított társadalmi hasznosság megközelíteni a társadalmi hasznosság maximumát. Erre a célra a kényszerítési értéket (enforcement value EV) használjuk. A $G \in C$ játék $EV(G)$ kényszerítési értéke a társadalmi hasznosság maximumának és a puha korrelált egyensúly által biztosítható legnagyobb társadalmi hasznosság értékének a hányadosa. Az egész C osztályon vett kényszerítési értéket pedig az $EV = \sup_{G \in C} EV(G)$ értékkel definiáljuk. A kényszerítési érték közeli rokonságban van a „stabilitás ára” (price of stability, [1],[5]) mutatószámmal. Itt egy költségalapú modell keretében állítják arányba a legjobb Nash-egyensúly (vagy korrelált egyensúly) társadalmi költségét a társadalmi költség minimumával. A költségmodellel nyert eredményeket nem lehet egyszerű eszközökkel átvinni hasznosságalapú modellekre, mint ahogy azt [2]-ben a szerzők megmutatják.

Ebben a dolgozatban a kétkiszolgálós, egyszerű, torlódási játékokkal foglalkozunk. Ezekben a játékokban minden játékos két adott kiszolgáló közül választhat és a kifizetés (hasznosság), amit az egyes játékosok kapnak, csak az adott kiszolgálót választó játékosok számától függ. A torlódási játékok speciális esetként tartalmazzák a legismertebb társadalmi csapdákat (fogoly dilemma, nemek harca, gyáva nyúl, galamb-héja) és azok bizonyos általánosításait több személy (játékos) esetére [8], [9]. Ebben a munkában még azt is feltesszük, hogy mindkét kiszolgáló esetében a kifizetés nem növekszik (általában csökken) a használók számának növekedésével, és a kifizetés változását egy lineáris függvény írja le. Ashlagi et al. [2] részletesen tanulmányozták ezeket a játékokat, és becsléseket adtak a korrelált egyensúly kényszerítési értékére. Mi a következőkben a puha korrelált egyensúly kényszerítési értékével foglalkozunk. Korábban Forgó [6] két, három és négy játékos esetére pontos értéket határozott meg, míg tetszőleges számú játékosra a $\frac{4}{3}$ felső becslést adta. Ebben a dolgozatban meghatározunk egy pontos alsó korlátot, ami $\frac{9}{8}$ -dal egyenlő, és a $\frac{4}{3}$ -nál lényegesen jobb felső korlátot. Ez a korlát aszimptotikusan (ha a játékosok száma tart a végtelenhez) szintén $\frac{9}{8}$ -dal egyenlő. Gyáva nyúl típusú játékokra [9], amelyeknél az egyik kiszolgálónál a kifizetés növekszik, a másikonál pedig csökken a használók számának növekedésével, sikerült bizonyítani, hogy a kényszerítési érték pontosan 2.

A cikk szerkezete a következő. A második fejezetben összefoglaljuk a szükséges előzményeket. A harmadik fejezetben meghatározzuk az *SCE* kényszerítési értékének alsó és felső becsléseit. A negyedik fejezetben további kutatási irányokat vázolunk fel.

2. Előzmények

Az *SCE* definíciójához szükség van néhány játékelméleti jelölésre és definícióra. Jelölje $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$ egy n -személyes, nem kooperatív játék normál formáját, ahol S_1, \dots, S_n a véges stratégiahalmazok, f_1, \dots, f_n pedig a kifizetőfüggvények. A korrelált egyensúlyok alapvető meghatározói a különféle ösztönző feltételek. Ezek egy játékosnak a játékvezető tanácsának megfogadásával elérhető várható hasznosságát hasonlítják össze azzal a várható hasznossággal, amit a tanács megfogadása nélkül lehet elérni. Az ösztönző feltételt az i játékosra fogalmazzuk meg, de a könnyebb jelölés miatt az indexet elhagyjuk ott, ahol ez nem okoz félreértést. Vezessük be a következő jelöléseket:

$N = \{1, \dots, n\}$: a játékosok halmaza.

$I = \{1, \dots, m\}$: az i játékos stratégiahalmaza, az egyes stratégiákat a megfelelő indexszel reprezentáljuk.

s_- az i játékos stratégiáját nem tartalmazó csonka stratégiaprofil.

S_- : a csonka stratégiaprofilok halmaza.

(j, s_-) , $j \in I$, $s_- \in S_-$: egy teljes stratégiaprofil.

$S = \{(j, s_-) : j \in I, s_- \in S_-\}$: a teljes stratégiaprofilok halmaza.

$f(j, s_-)$: az i játékos kifizetése (hasznossága), ha ő a j stratégiát játssza, a többiek pedig s_- -et.

p : egy valószínűségeloszlás S_- -en.

$p(j, s_-)$: az a valószínűség, amelyet p a (j, s_-) stratégiaprofilhoz rendel.

2.1. Definíció. A CE egy olyan p valószínűségeloszlás, amely minden i ($i \in N$) játékos esetében kielégíti az alábbi ösztönző feltételeket

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-)p(j, s_-) \quad \text{minden } j, k \in I \text{ -re.}$$

2.2. Definíció. A CCE egy olyan p valószínűségeloszlás, amely minden i ($i \in N$) játékos esetében kielégíti az alábbi ösztönző feltételeket

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-)p(j, s_-) \quad \text{minden } k \in I \text{ -re.}$$

A következőkben szükségünk lesz a következő jelölésre. Legyen

$$K = \prod_{j=1}^m (I \setminus \{j\}).$$

A K elemeit „megengedett” (index)halmazoknak nevezzük.

2.3. Definíció. Az SCE olyan p valószínűségeloszlás, amely minden i ($i \in N$) játékos esetében kielégíti az alábbi ösztönző feltételeket

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k_j, s_-)p(j, s_-)$$

minden $(k_1, \dots, k_m) \in K$ megengedett indexhalmazra.

Az SCE részletes tárgyalása megtalálható [6]-ban.

Röviden foglaljunk össze néhány tudnivalót az n -személyes, kétkiszolgálós, egyszerű, torlódási játékokról. Részletesen [2]-ben és [7]-ben olvashatunk róla. Egy n -személyes, kétkiszolgálós, egyszerű, torlódási játékot a „torlódási formával” adhatunk meg legkönnyebben. A torlódási forma két $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ nem negatív vektor, amelynek jelentése a következő. Ha az $F1$ kiszolgálót választó játékosok száma j , akkor mindegyikük a_j hasznossághoz, ha az $F2$ kiszolgálót választó játékosok száma k , akkor mindegyikük b_k hasznossághoz jut. Látható, hogy a hasznosságok csak az adott kiszolgálót igénybe vevők számától függenek. A torlódási formához természetes módon rendelhető hozzá egy n -személyes játék (a torlódási játék). Jelöljük a játékosok halmazát N -el. Minden játékos stratégiahalmaza $\{F1, F2\}$, amelyet röviden $\{1, 2\}$ -vel, a kiszolgálók indexeivel jelölünk, a kifizetéseket pedig az a és b vektorokból határozzuk meg. Egy stratégiaprofil tehát

(i_1, \dots, i_n) , $i_j \in \{1, 2\}$, $j \in N$. Jelöljük p_{i_1, \dots, i_n} -vel annak a valószínűségét, hogy a játékvezető az (i_1, \dots, i_n) stratégiaprofilt választja. Legyen továbbá t azoknak a játékosoknak a száma, akik az $F2$, $t = 0, 1, \dots, n$ kiszolgálót választották, továbbá legyen S_t azoknak a stratégiaprofiloknak a halmaza, amelyekben az $F2$ -t választó játékosok száma t . Figyelembe véve a játék szimmetriáját, feltesszük, hogy minden p_{i_1, \dots, i_n} , $(i_1, \dots, i_n) \in S_t$ valószínűség egyenlő. Jelöljük ezt p_t -vel.

Ezeknek a jelöléseknek a használatával minden játékos ösztönző feltétele a következő

$$(a_n - b_1)p_0 + \sum_{t=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{t-1} (b_t - a_{n-t+1}) + \binom{n-1}{t} (a_{n-t} - b_{t+1}) \right) p_t + (b_n - a_1)p_n \geq 0, \quad (1)$$

a normalizáló feltételek pedig

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} p_t = 1, \quad p_t \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, n, \quad (2)$$

valamint az SW (a játékosok hasznosságainak az összege):

$$SW = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (b_t t + a_{n-t}(n-t)) p_t. \quad (3)$$

A $q_t = \binom{n}{t} p_t$, $t = 0, 1, \dots, n$ jelölés bevezetésével (1), (2) és (3) az alábbi egyszerűbb alakra hozható:

$$\sum_{t=0}^n \left(t(b_t - a_{n-t+1}) + (n-t)(a_{n-t} - b_{t+1}) \right) q_t \geq 0, \quad (4)$$

$$\sum_{t=0}^n q_t = 1, \quad q_t \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, n,$$

$$SW = \sum_{t=0}^n \left(b_t t + a_{n-t}(n-t) \right) q_t. \quad (5)$$

A maximális SW , amit az SCE biztosítani tud, az alábbi LP optimális célfüggvényértéke

$$P : \max \sum_{t=0}^n \left(b_t t + a_{n-t}(n-t) \right) q_t$$

$$\sum_{t=0}^n \left(t(b_t - a_{n-t+1}) + (n-t)(a_{n-t} - b_{t+1}) \right) q_t \geq 0,$$

$$\sum_{t=0}^n q_t = 1, \quad q_t \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, n.$$

3. Kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok puha korrelált egyensúlyának kényszerítési értéke

Ezt a játékosztályt a *CE* szempontjából Ashlagi et al. [2] vizsgálták, az *SCE* szempontjából pedig Forgó [7]. Forgó [7] a kényszerítési értékre a $\frac{4}{3}$ felső korlátot adta meg, és azt a sejtést fogalmazta meg, hogy ez a korlát javítható. Mint látni fogjuk, ez tényleg így van. Az *EV* pontos értékei ismertek egészen $n = 4$ -ig. $EV = 1$ az $n = 2, 3$ esetben, és $EV = 1,007478$ az $n = 4$ -re, lásd [7]. Így a következőkben feltehetjük, hogy $n \geq 5$. Egy kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játék torlódási formáját az alábbi táblázattal adhatjuk meg, ahol x, y, z a hasznosság változását leíró lineáris függvények paraméterei.

	<i>F1</i>		<i>F2</i>
a_1	$= (n-1)x$	b_1	$= y + (n-1)z$
a_2	$= (n-2)x$	b_2	$= y + (n-2)z$
	\dots		\dots
a_t	$= (n-t)x$	b_t	$= y + (n-t)z$
	\dots		\dots
a_{n-1}	$= x$	b_{n-1}	$= y + z$
a_n	$= 0$	b_n	$= y$

Az általánosságot valamennyire sérti, hogy a legalacsonyabb hasznosságot 0-nak vettük, ugyanakkor az elemzés így lényegesen könnyebb, mert ezzel a paraméterek számát eggyel csökkentettük. A mikroökonómiában egyébként ez egy szokásos feltevés. Feltesszük továbbá, hogy $x > 0, y > 0, z \geq 0$. Ha behelyettesítjük a torlódási formát (4)-be és (5)-be, akkor a következőket kapjuk

$$\sum_{t=0}^n \left(t(n+1-2t)x + (2t-n)y + (n-t)(2t-n+1)z \right) q_t \geq 0,$$

$$SW = \sum_{t=0}^n \left(t(n-t)(x+z) + ty \right) q_t.$$

Abból a célból, hogy az x, y, z paraméterektől való függést jól láthatóvá tegyük, vezessük be a következő jelöléseket

$$C(n, x, y, z, t) = - \left[t(n+1-2t)x + (2t-n)y + (n-t)(2t-n+1)z \right], \quad (6)$$

$$W(n, x, y, z, t) = t(n-t)(x+z) + ty \quad (7)$$

minden $t = 0, 1, \dots, n, (n \geq 5)$ -re. Mint azt a korábbiakban láttuk, a maximálisan elérhető SW , amit egy *SCE* realizálni tud rögzített n, x, y, z esetén, a következő *LP* optimális célfüggvényértéke:

$$P : \max \sum_{t=0}^n W(n, x, y, z, t) q_t$$

$$\sum_{t=0}^n C(n, x, y, z, t) q_t \leq 0,$$

$$\sum_{t=0}^n q_t = 1, \quad q_t \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, n.$$

Konkretizálva az *EV* bevezetésben megadott általános definícióját a kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok osztályára, az *EV*-t a következő képpen definiáljuk:

3.1. Definíció.

$$EV = \sup_{n, x, y, z} \frac{\max_{t=0,1,\dots,n} W(n, x, y, z, t)}{\max_{q \in L_P} \sum_{t=0}^n W(n, x, y, z, t) q_t},$$

ahol L_P a P feladat lehetséges tartományát jelöli.

Nyilván a $\max_{0 \leq t \leq n} W(n, x, y, z, t)$ folytonos maximum a számláló felső korlátja, ugyanakkor bármely $q \in L_P$ -re $\sum_{t=0}^n W(n, x, y, z, t) q_t$ a nevező alsó korlátja. Így a P minden $q = (q_0, q_1, \dots, q_n)$ lehetséges megoldására

$$EV \leq \sup_{n, x, y, z} \frac{\max_{0 \leq t \leq n} W(n, x, y, z, t)}{\sum_{t=0}^n W(n, x, y, z, t) q_t}. \quad (8)$$

Ugyanakkor bármely n, x, y, z paraméterre

$$EV \geq \frac{\max_{t=0,1,\dots,n} W(n, x, y, z, t)}{\max_{q \in L_P} \sum_{t=0}^n W(n, x, y, z, t) q_t}. \quad (9)$$

Hasznos lesz a következő egyszerű lemma és annak két következménye.

3.1. LEMMA. Minden n, x, y, z, t -re és $\lambda > 0$ -ra,

$$W(n, \lambda x, \lambda y, \lambda z, t) = \lambda W(n, x, y, z, t)$$

és

$$C(n, \lambda x, \lambda y, \lambda z, t) = \lambda C(n, x, y, z, t).$$

Bizonyítás. A (6) és (7) formulákba való behelyettesítéssel azonnal látható. \square

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *EV* értékét nem befolyásolja a $\lambda > 0$ faktorra való átskálázás.

3.2. KÖVETKEZMÉNY. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $y = 1$.

3.1. TÉTEL. A kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok osztályán az SCE kényszerítési értéke $EV \leq \left(\frac{9}{8}\right)^2 = 1,265625$.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $W(n, x, y, z, t)$ a t szerinti folytonos maximumát a

$$t^* = \frac{n}{2} + \frac{y}{2(x+z)} \quad (10)$$

pontban veszi fel. A 3.2. következmény szerint feltehetjük, hogy $y = 1$. Vezessük be az $r = \frac{1}{x+z}$ jelölést. Két esetet különböztetünk meg.

A) $r \leq \frac{n+3}{2}$. Ha n páros, akkor $q_{\frac{n}{2}} = 1, q_t = 0, t \neq \frac{n}{2}$ a P lehetséges megoldása. Így a (8) egyenlőtlenség miatt

$$EV \leq \frac{W(n, x, 1, z, t^*)}{W(n, x, 1, z, \frac{n}{2})}.$$

Belyettesítve (7)-be, és felhasználva az $r = \frac{1}{x+z}$ jelölést, azt kapjuk, hogy

$$EV \leq \frac{W(n, x, 1, z, t^*)}{W(n, x, 1, z, \frac{n}{2})} = \frac{\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right)(x+z) + \left(\frac{n}{2} + \frac{r}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2}\right)^2(x+z) + \frac{n}{2}} = \frac{(n+r)^2}{n(n+2r)}.$$

A jobboldal r növekvő függvénye, ezért $r \leq \frac{n+3}{2}$ miatt

$$EV \leq \frac{\left(n + \frac{n+3}{2}\right)^2}{n\left(n + 2\frac{n+3}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{4}(3n+3)^2}{n(2n+3)}. \quad (11)$$

A jobboldal n csökkenő függvénye, és így, minthogy $n = 6$ a legkisebb páros szám, amely kielégíti az $n \geq 5$ feltételt,

$$EV \leq \frac{\frac{1}{4}(3 \cdot 6 + 3)^2}{6(2 \cdot 6 + 3)} = 1,225.$$

Ha n páratlan, akkor a P feladat $q_{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2}, q_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2}, q_t = 0, t \neq \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$ lehetséges megoldásával dolgozunk. Behelyettesítésekkel azt kapjuk, hogy

$$EV \leq \frac{\frac{1}{4}(3n+3)^2}{n(2n+3)-1}.$$

A jobboldal most is n csökkenő függvénye, amiből az $n = 5$ behelyettesítéssel az

$$EV \leq \frac{81}{64} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = 1,265625$$

becslést kapjuk.

B) $r > \frac{n+3}{2}$. Vegyük a $C(n, x, 1, z, t)$ t -szerinti minimumát. A minimumpont

$$t' = \frac{(n+1)x+2+(3n-1)z}{4(x+z)} = \frac{n+1}{4} + \frac{r}{2} + \frac{(n-1)zr}{2}. \quad (12)$$

Mivel $r > \frac{n+3}{2}$, és $zr > 0$, ezért

$$t' - \frac{n}{2} = \frac{n+1}{4} + \frac{r}{2} + \frac{(n-1)zr}{2} - \frac{n}{2} > 1. \quad (13)$$

Jelölje $[a]$ az a valós szám egészrészét. A $C(n, x, 1, z, t)$ a t -nek konvex kvadratikus függvénye. Tudjuk, hogy $C(n, x, 1, z, \frac{n}{2}) < 0$, így $C(n, x, 1, z, t') < 0$. Mivel a t' a $C(n, x, 1, z, t)$ konvex kvadratikus függvény minimumpontja, ezért (13) miatt $[t'] > \frac{n}{2}$, és így $C(n, x, 1, z, [t']) < 0$. A kvadratikus függvény szimmetriája miatt $C(n, x, 1, z, t' + (t' - \frac{n}{2})) < 0$. Ugyanakkor (13) miatt $[t'] + 1 < t' + (t' - \frac{n}{2})$, és így $C(n, x, 1, z, [t'] + 1) < 0$.

Tekintsük először azt az egyszerű esetet, amikor $[t'] \leq t^* < [t'] + 1$. Az egészrész definíciója miatt $[t'] = [t^*]$, és mivel

$$\max_{t=0,1,\dots,n} W(n, x, y, z, t) = \max\{W(n, x, 1, z, [t^*]), W(n, x, 1, z, [t^*] + 1)\},$$

és $q_{[t^*]} = 1$, $q_t = 0$, $t \neq [t^*]$, valamint $q_{[t^*]+1} = 1$, $q_t = 0$, $t \neq [t^*] + 1$ is lehetséges megoldása P -nek, ezért $EV = 1$.

Nézzük most azt az esetet, amikor $t^* \notin [[t'], [t'] + 1)$. Belátjuk, hogy

$$EV \leq \sup_{n,x,z} \frac{W(n, x, 1, z, t^*)}{W(n, x, 1, z, t')} \leq \frac{9}{8}. \quad (14)$$

Azt bizonyítjuk, hogy a

$$8W(n, x, z, t^*) - 9W(n, x, z, t') < 0 \quad (15)$$

egyenlőtlenség fennáll a paraméterek minden megengedett értékére, amiből (14) következik. Felhasználva az $r = \frac{1}{x+z}$ jelölést, behelyettesítések után (15) az alábbi formát ölti

$$8 \left(\left(\frac{n}{2} + \frac{r}{2} \right) \left(\frac{n}{2} - \frac{r}{2} \right) \frac{1}{r} + \frac{n}{2} + \frac{r}{2} \right) - 9 \left(\left(\frac{n+1}{4} + \frac{r}{2} + \frac{n-1}{2} rz \right) \left(\frac{3n-1}{4} - \frac{r}{2} - \frac{n-1}{2} rz \right) \frac{1}{r} + \frac{n+1}{4} + \frac{r}{2} + \frac{n-1}{2} rz \right) < 0.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt r -el

$$8 \left(\frac{n^2}{4} - \frac{r^2}{4} + \frac{n}{2} r + \frac{r^2}{2} \right) - 9 \left[\left(\frac{n+1}{4} + \frac{r}{2} + \frac{n-1}{2} rz \right) \left(\frac{3n-1}{4} - \frac{r}{2} - \frac{n-1}{2} rz \right) + \frac{n+1}{4} r + \frac{r^2}{2} + \frac{n-1}{2} r^2 z \right] < 0.$$

A kijelölt szorzások elvégzése, némi átrendezés és egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{5}{16}n^2 - \frac{9}{8}n + \frac{9}{16} + r \left(-\frac{1}{2}n \right) + r^2 \left(-\frac{1}{4} \right) + rz \\ \left(-\frac{9}{4}(n-1)^2 \right) + (rz)^2 \frac{9}{4}(n-1)^2 < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Az utolsó két tag rz -nek konvex kvadratikus függvénye, $0 \leq rz < 1$, ezért az utolsó két tag összege nem lehet nagyobb 0-nál. Mivel r és r^2 együtthatói negatívak, figyelembe véve az $r > \frac{n+3}{2}$ feltételt, ha a (16) fennáll az $r = \frac{n+3}{2}$ helyettesítéssel és az utolsó két tag elhagyásával, akkor a paraméterek minden megengedett értékére is fennáll. Ezek után a kijelölt műveletek elvégzése és egyszerűsítések után a $-\frac{9}{4}n < 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami nyilván fennáll minden $n \geq 1$ -re.

Az A és B r minden lehetséges értékét lefedi, és mivel $\frac{9}{8} < \left(\frac{9}{8}\right)^2$, a tétel állítását bebizonyítottuk. \square

Megjegyezzük, hogy a (11) becslés n növekedésével javul, és aszimptotikusan

$$EV \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(3n+3)^2}{n(2n+3)} = \frac{9}{8} = 1,125.$$

3.2. TÉTEL. *A kétkisizsgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok osztályán az SCE kényszerítési értéke $EV \geq \frac{9}{8} = 1,125$.*

Bizonyítás. Tekintsük minden $n \geq 5$ -re az $x = \frac{2}{n-3}, y = 1, z = 0$ paraméterekkel megadott kétkisizsgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékokat (vagy ezzel ekvivalensen $r = \frac{n-3}{2}, y = 1, z = 0$). Tegyük fel, hogy n páratlan és $\sqrt{n+1}$ egész. Nevezzük ezeket megengedhető n -eknek. A legkisebb megengedhető $n = 15$. A (9) egyenlőtlenségben szereplő tört számlálója meghatározásának érdekében a $W(n, x, y, z, t)$ függvény t -szerinti maximumát kell vennünk a $[0, n]$ intervallumban lévő egészekre. A folytonos maximumpont $t^* = \frac{n}{2} + \frac{r}{2} = \frac{3(n-1)}{4}$. Ez vagy egész, vagy két szomszédos egész számtani átlaga. Az első esetben a folytonos és egész értékű maximumpontok egybeesnek. A második esetben, mivel rögzített n, x, y, z -re a W a t változónak konkáv kvadratikus függvénye, a W egészértékű maximumpontjai a t^* egészértékű szomszédai. Az egyik $t^* - \frac{1}{2} = \frac{3n-5}{4}$. Így a W egészértékű maximuma

$$\begin{aligned} \frac{9(n-1)^2}{8(n-3)}, \quad \text{ha } t^* \text{ egész,} \\ \frac{(3n-5)(3n-1)}{8(n-3)}, \quad \text{ha } t^* \text{ nem egész.} \end{aligned}$$

A (9) egyenlőtlenségben szereplő tört nevezőjének meghatározása céljából emlékeztetünk arra, hogy $C(n, x, y, z, t)$ a t változó konvex kvadratikusan függvénye n, x, y, z rögzített értékeire. Határozzuk meg a

$$C(n, x, y, z, t) = C(n, \frac{2}{n-3}, 1, 0, t) = 0$$

másodfokú egyenlet gyökeit. Ezek

$$t_1 = \frac{n-1-\sqrt{n+1}}{2},$$

$$t_2 = \frac{n-1+\sqrt{n+1}}{2}.$$

Megengedhető n -ekre mindkét gyök egész. Azt állítjuk, hogy $q' = (q'_0, q'_1, \dots, q'_n)$, $q'_{t_2} = 1, q_t = 0, t \neq t_2$ a P feladat optimális megoldása. A lehetségeségről egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk. A célfüggvény értéke ebben a lehetséges megoldásban

$$W(t_2) = \frac{1}{2(n-3)}(2n^2 - 5n + (n-1)\sqrt{n+1} + 1).$$

A P egy lineáris programozási feladat, amelynek a duálja a következő LP

$$\begin{aligned} D &: \min v \\ v &\geq -C(n, \frac{2}{n-3}, 1, 0, t)u + W(n, \frac{2}{n-3}, 1, 0, t) \text{ minden } t = 0, 1, \dots, n\text{-re,} \\ u &\geq 0. \end{aligned}$$

Behelyettesítéssel és némi számolással belátható, hogy

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4n} \left((n-1)\sqrt{n+1} - (n+1) \right), \\ v &= \frac{1}{2(n-3)}(2n^2 - 5n + (n-1)\sqrt{n+1} + 1) \end{aligned}$$

a D lehetséges megoldása, a v változó értéke egyúttal a célfüggvényérték is. Mivel $v = W(t_2)$, a lineáris programozás gyenge dualitási tétele értelmében

$$W(t_2) = \max_{q \in L_P} \sum_{t=0}^{t=n} W(n, x, y, z, t)q_t.$$

Így fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek

$$\begin{aligned} EV &\geq \frac{\frac{9(n-1)^2}{8(n-3)}}{\frac{1}{2(n-3)}(2n^2 - 5n + (n-1)\sqrt{n+1} + 1)} = \\ &\quad \frac{9}{4} \frac{(n-1)^2}{2n^2 - 5n + (n-1)\sqrt{n+1} + 1}, \quad \text{ha } t^* \text{ egész,} \end{aligned}$$

$$EV \geq \frac{\frac{(3n-5)(3n-1)}{8(n-3)}}{\frac{1}{2(n-3)}(2n^2 - 5n + (n-1)\sqrt{n+1} + 1)} = \frac{1}{4} \frac{(3n-5)(3n-1)}{2n^2 - 5n + (n-1)\sqrt{n+1} + 1}, \quad \text{ha } t^* \text{ nem egész.}$$

Mindkét esetben az egyenlőtlenség jobb oldala n -nek monoton növekvő függvénye, és $\frac{9}{8}$ -hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$, amiből a tétel állítása következik. \square

A 3.1. és 3.2. tételekből következik a

3.3. KÖVETKEZMÉNY. *A kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok osztályán az SCE kényszerítési értékére $\frac{9}{8} \leq EV \leq \left(\frac{9}{8}\right)^2$.*

4. Kitekintés

A további kutatások sokféle irányban mehetnek. Néhány lehetőség:

- Meg kellene határozni EV pontos értékét. Szimulációs vizsgálatok azt a sejtést támogatják, hogy $EV = \frac{9}{8}$.
- Másféle társadalmi hasznossággal is dolgozhatunk (mint például az egalitárius).
- Meg lehet vizsgálni, hogy milyen hatása van, ha hasznosságok helyett költségekkel számolunk.
- Mi a helyzet, ha több mint két kiszolgáló van?
- Hogyan lehet kiterjeszteni az elemzést nem egyszerű torlódási játékokra?
- Milyen a puha korrelált egyensúly teljesítménye, ha azt nem a legrosszabb esetben, hanem az átlagos esetre vizsgáljuk?

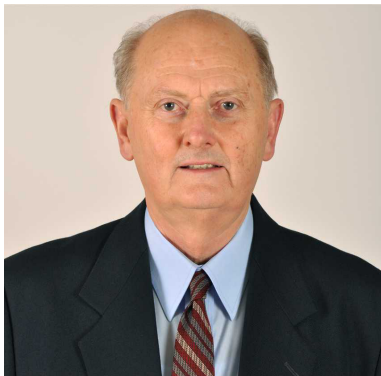
További konkrét alkalmazások kutatása, ahol a puha korrelált egyensúly növelni tudja a társadalmi hasznosságot, szintén szép feladat.

Köszönetnyilvánítás

Az elméleti eredmények számítógépes tesztelésében nyújtott segítségével köszönetet mondok Abaffy Józsefnek, a szerkesztésért pedig Ágoston Kolosnak. A kutatás az NKFI K-119930 projekt keretében folyt.

Hivatkozások

- [1] ANSHELEVICH, E., DASGUPTA, A., JON KLEINBERG, E. T., WEXLER, T., AND ROUGHGARDEN, T.: *The price of stability for network design with fair cost allocation*, in: *Proceedings of the 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pp. 295-304 (2004).
- [2] ASHLAGI, I., MONDERER, D., AND TENNENHOLTZ, M.: *On the value of correlation*, Journal of Artificial Intelligence, Vol. **33**, pp. 516-522 (2008).
- [3] AUMANN, R. J.: *Subjectivity AND correlation in randomized strategies*, Journal of Mathematical Economics, Vol. **1** No. **1**, pp. 67-96. (1974).
- [4] AUMANN, R. J.: *Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality*, Econometrica, Vol. **55**, pp. 1-18 (1987).
- [5] CHRISTODOULOU, G. AND KOUTSOPIAS, E.: *On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games*, in: *Proceedings of the 13th Annual European Symposium, ESA*, Vol. **59-70** (2005).
- [6] FORGÓ, F.: *A generalization of correlated equilibrium: A new protocol*, Mathematical Social Sciences, Vol. **60**, pp. 186-190 (2010).
- [7] FORGÓ, F.: *Measuring the power of soft correlated equilibrium in 2-facility simple non-increasing linear congestion games*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **22**, pp. 139-165 (2014).
- [8] FORGÓ, F.: *The prisoners dilemma, congestion games and correlation*, in: TAVADZE, A. (Hg.), *Progress in Economics Research*, Vol. **34**, pp. 129-141 (2014).
- [9] FORGÓ, F.: *Korreláció, torlódási játékok, a gyáva nyúl játék*, Szigma, Vol. **XLVIII** No. **(1-2)**, pp. 47-68 (2017).
- [10] GERARD-VARET, L.-A. AND MOULIN, H.: *Correlation and duopoly*, Journal of Economic Theory, Vol. **19**, pp. 123-149 (1978).
- [11] MOULIN, H., RAY, I., AND SEN-GUPTA, S.: *Coarse correlated equilibria in an abatement game*, Techn. Ber., Cardiff Economics Working Papers No. E2014/24 (2014).
- [12] MOULIN, H., RAY, I., AND SEN-GUPTA, S.: *Improving Nash by coarse correlation*, Journal of Economic Theory, Vol. **150**, pp. 852-865 (2014).
- [13] MOULIN, H. AND VIAL, J.-P.: *Strategically zero-sum games: the class of games whose completely mixed equilibria cannot be improved upon*, International Journal of Game Theory, Vol. **7**, pp. 201-221 (1978).
- [14] NASH, J. F.: *Equilibrium points in n-person games*, in: *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. **36**, pp. 48-49 (1950).
- [15] NASH, J. F.: *Non-Cooperative games*, The Annals of Mathematics, Vol. **54**, pp. 286-295 (1951).



Forgó Ferenc 1942-ben született Pécsen. 1965-ben közgazdász diplomát szerzett a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem tervmatematika szakán. Ugyanitt kezdett dolgozni a Matematika Tanszéken. 1991-től egyetemi tanár. 2012-től a Budapesti Corvinus Egyetem professor emeritusa. 1970 és 1994 között az USA-ban összesen négy évig dolgozott az USC és a Rutgers egyetemeken. 1987-1995 között a BCE jogelődjén a Matematikai és Számítástudományi Intézet igazgatója volt, majd 1995 és 2000 között az Operációkutatás

Tanszék vezetője. 1998-ban Szent-Györgyi Albert-díjban részesült. 2001-ben Krekó Béla-díjat, 2014-ben Egerváry Jenő emléklakettet, 2007-ben Magyar Köztársaság Arany Érdemkeresztje kitüntetését kapott. 1997 és 2000 között Széchenyi professzori ösztöndíjas volt, 2011-ben a Budapesti Corvinus Egyetemen Kutatási Kiválóság Ösztöndíjat nyert el. 1974-ben lett a Közgazdaságtudomány kandidátusa, 2015-ben az MTA doktora.

Tudományos tevékenységének fő területei: matematikai programozás, játékelmélet és döntéselmélet. 101 tudományos közleménye van (ezek közül 6 könyv), amelyekre a hivatkozások száma 468.

FORGÓ FERENC

Budapesti Corvinus Egyetem

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

1098 Budapest, Fővám tér 8.

ferenc.forgo@uni-corvinus.hu

ON THE ENFORCEMENT VALUE OF SOFT CORRELATED EQUILIBRIUM FOR TWO-FACILITY, NON-INCREASING, SIMPLE LINEAR CONGESTION GAMES

FERENC FORGÓ

Lower and upper bounds for the enforcement value (Ashlagi I, Monderer D and Tennenholz M (2008) Journal of Artificial Intelligence 33:575-613) of soft correlated equilibrium (Forgó F (2010) Mathematical Social Sciences 60:186-190) are given for the class of two-facility, non-increasing, simple linear congestion games. The lower and upper bounds are 1.125 and 1.265625, respectively. The upper bound is significantly better than the previously known 1.333.

Keywords: correlated equilibrium, enforcement value, congestion game

TAGKILÉPÉSEK ÉS A MAGYAR BEFOLYÁS VÁLTOZÁSA AZ EURÓPAI UNIÓ TANÁCSÁBAN

PETRÓCZY DÓRA GRÉTA, ROGERS MARK FRANCIS, KÓCZY Á. LÁSZLÓ

Az Egyesült Királyságot követően több uniós országban is felmerült az Európai Unióból való kilépés gondolata. Cikkünkben megvizsgáltuk, hogy ha valamely ország kilépne, hogyan változnának az erőviszonyok a bennmaradók között. A kilépések lehetséges hatásaiból egyetlen vonatkozást elemeztünk: az egyes tagországok, különösen Magyarország befolyásának változását az Európai Unió Tanácsában. Minden ország kilépésére ugyanazt a mintázatot találtuk, szoros összefüggés van a népességszám és a döntési befolyás változása között, a kis országok hatalma nőtt a legnagyobb mértékben.

1. Bevezetés

Az Egyesült Királyság Európai Unióból való kilépése (az úgynevezett Brexit) váratlan fordulat az európai integrációs folyamatban. A lépés meglepő, korábban egyetlen önálló ország sem kezdeményezte a kilépést. Azóta szóba került a görög (Grexit), a francia (Frexit) és a cseh (Czexit) kilépés lehetősége is [21].

Bár egy lehetséges kilépésnek számos politikai és gazdasági hatása van, cikkünkben egyetlen nézőpontot vizsgálunk meg, nevezetesen, hogy hogyan változnak a kilépések hatására az erőviszonyok az Európai Unió Tanácsában.

Az Európai Unió Tanácsa, vagy ismertebb nevén a Miniszterek Tanácsa az Európai Parlamenttel együtt az Unió egyik fő döntéshozó szervezete, többek között az uniós költségvetés elfogadásáért is felelős. A Tanácsban az uniós országok miniszterei üléseznek. Minden országnak egyetlen képviselője van, az országok közötti méretkülönbség a lakossággal súlyozott minősített többségi szavazási eljárásban jelenik meg.

A Lisszaboni Egyezmény a döntéshozatalt a támogató országok számához, illetve lakosságához köti [4]. Egy javaslat akkor lép érvénybe, ha

1. a tagállamok legalább 55%-a támogatja (tagállam kvóta);
2. akik az EU állampolgárainak legalább 65%-át képviselik (lakosság-kvóta).

A minősített többségi szavazás jelentőségét mutatja, hogy az interneten elérhető és mobilapplikációként is letölthető egy hivatalos, az EU által kiadott szavazatszám-láló program [7]. A súlyok ilyen módon történő kialakítása lehetővé teszi, hogy előre meg tudjuk mondani, hogyan alakulnak a szavazási erőviszonyok, ha egy ország kilép az Európai Unióból. Számos tanulmány bizonyította az *a priori* hatalmi befolyás szerepét a végleges döntéshozatalra [10, 12]. Warntjen [30] empirikusan is belátta, hogy erős pozitív kapcsolat van az uniós jogalkotásban a változtatási javaslatot benyújtó ország szavazati ereje és a szavazás sikeressége között. Éppen ezért fontos megvizsgálni, mekkora befolyással rendelkeznek az egyes országok az Európai Unió Tanácsában.

A cikkben két széles körben használt [12, 14, 17, 19, 31] hatalmi mérték, a Shapley–Shubik-index [26] és a Banzhaf-index [1, 3] segítségével vizsgáljuk a tagok befolyását a lehetséges kilépővel együtt, illetve nélküle. Figyelembe vesszük, hogy egy ország kilépésével a befizetése is elveszik, a számított hatalmi indexeket a befizetés csökkenésével arányosan korrigáljuk. Minden ország kilépésére ugyanazt a mintázatot találjuk: szoros összefüggés van a népességszám és a döntési befolyás változása között. A kis országok hatalmi indexe növekszik a legnagyobb mértékben. Ezek az eredmények ellentétesek azzal, amit Kóczy [18, 19] talált a brit kilépéssel kapcsolatban. Megállapítjuk, hogy egy kilépés a nagy országok számára akkor kedvező, ha a tagállam kvóta csökken, míg a kis országok hatalmi indexét akkor növeli, ha nem változik a korlát.

A 2. fejezetben ismertetjük a felhasznált hatalmi indexet és a számítási módszereinket. A 3. fejezet tartalmazza az eredményeinket. Írásunkat rövid összefoglalás zárja.

2. Módszertan

A szavazási helyzeteket kezelhetjük egyszerű átruházható hasznosságú kooperatív játékként, ahol a játékosok a szavazók, egy koalíció értéke egy, ha tagjai elegendően vannak egy kérdés megszavazásához, minden más esetben pedig nulla. Az egyes játékosok befolyását hatalmi mértékkel vagy *hatalmi indexszel* mérjük.

Felsenthal és Machover [11, 13] kétféle megközelítést különített el a szavazási erő *a priori* mérésében, az I-hatalmat és a P-hatalmat. Az első a befolyásra koncentrált, azt mérjük, mekkora a szavazó lehetséges hatása a meghozott döntésekre. Ez a jobb megközelítés, ha azt vizsgáljuk, hogy különböző döntési helyzetekben milyen eséllyel tudunk egy döntést elérni, például, hogy szigorítsuk a tagországok gazdálkodásáról szóló szabályokat. A második értelmezés szerint a játékosok a szavazással egyfajta díjhoz jutnak hozzá, a hatalmi index azt méri, mekkora a játékos várható részesedése a jutalomból. Itt a döntési képességet teljesen figyelmen kívül hagyjuk: ha a szavazás eredménytelen, a díj nem kerül kiosztásra. Ez a célszerűbb megközelítés, ha azt szeretnénk mérni, mekkora szeletet kaphatunk egy

költségvetésből, viszont alkalmatlan különböző szavazási helyzetek összehasonlítására. A szavazási játékok legelterjedtebb hatalmi mértékei a Banzhaf-mérték és a Shapley–Shubik-index, az első az I-hatalom, míg a második a P-hatalom mérőszáma [13, 29].

Cikkünkben azt vizsgáljuk, hogy az egyes országok mekkora befolyással bírnak az Európai Unió költségvetésének elosztására, így a második, P-hatalom megközelítést követjük, ezért elsősorban a Shapley–Shubik-indexet használjuk. Ugyanakkor, ahogy látni fogjuk, a Banzhaf-mérték normalizált változata, a Banzhaf-index is hasonló eredményekre vezet. A két index közti különbséget legjobban Straffin [28] valószínűségi modellje fogja meg: a Shapley–Shubik-index homogén, az (abszolút) Banzhaf-index független támogatási hajlamot feltételez.

A Shapley–Shubik-index [26] tulajdonképpen a Shapley-érték [25] alkalmazása szavazási játékokra. A Shapley-érték (magyar nyelven lásd Csóka [5], Kóczy [16, 19], Kóczy és Pintér [20], Pintér [23, 24], Solymosi [27]) a kooperatív játékelmélet egyik legelterjedtebb megoldásfogalma. Minden játékoshoz az egyes koalíciókhoz való egyéni hozzájárulásainak átlagát rendeli.

2.1. Definíció. Shapley–Shubik-index: Legyen v egy szavazási játék. Ekkor az i játékos *Shapley–Shubik-indexe*:

$$\sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)),$$

ahol $s = |S|$ az S koalíció tagjainak számát jelöli, N a játékosok halmaza, $n = |N|$ a játékosok száma, és v a karakterisztikus függvény, ami megadja a koalíciók (0 vagy 1) értékét.

Egy másik megközelítést képvisel a Banzhaf-index, amely a játékosok normalizált Banzhaf-értéke [1, 22]. Azt vizsgálja, milyen valószínűséggel befolyásolja egy játékos a szavazás kimenetelét [3]. A szavazó *kritikus*, ha kiválásával a korábban nyertes koalíció már veszít.

2.2. Definíció. Az i játékos Banzhaf-értéke:

$$\sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{n-1}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) = \frac{\eta_i(v)}{2^{n-1}},$$

ahol $\eta_i(v)$ az i játékos Banzhaf-féle pontszáma, azaz azon koalíciók száma, ahol i kritikus szavazó.

A szavazási erő mérésére a normalizált értékét szokták használni.

2.3. Definíció. A Banzhaf-féle pontszám normalizált értéke a Banzhaf-index:

$$\beta_i = \frac{\eta_i(v)}{\sum_{j \in N} \eta_j(v)}.$$

A hatalmi indexek számítását két példával szeretnénk megvilágítani.

2.1. Példa. Legyen adott három játékos, A, B és C, akiknek rendre 8, 6 és 4 súlyuk van egy szavazási helyzetben. Egy javaslatot akkor fogadnak el, ha az azzal egyetértők összszülya legalább 12. Szavazni csak igennel vagy nemmel lehet.

A Shapley-érték kiszámításához azt kell megnéznünk, hogy egy adott játékos az egyes koalíciók értékéhez mennyivel járul hozzá. Képzeljük el, hogy a három játékos véletlenszerű sorrendben lép be egy szobába, ahol az együttműködési megbeszélések zajlanak. Egy játékost akkor nevezünk *pivot*nak, ha belépése előtt nem, belépésével viszont már elérik a szobában tartozkodók a szavazási küszöböt. A pivot játékos határ-hozzájárulása 1, a többieké 0.

Három játékos esetén a csatlakozási sorrendek száma $3!$, azaz 6. Az 1. táblázat bemutatja, hogy az egyes sorrendek esetén ki lesz a pivot játékos. Például az A-B-C sorrend esetén a 12-es küszöböt akkor éri el, amikor A után B is belép a szobába. Négy esetben A a pivot játékos, míg egy-egy esetben B és C. Tehát az A játékos Shapley-értéke $2/3$, míg B és C játékosoké $1/6$. A Shapley-érték szerint B és C játékosnak, bár különböző a súlya, valós szavazási befolyása egyforma. Ha az A játékos megszavazza kérdést, akkor mindegy, hogy B vagy C csatlakozik hozzá. Amennyiben A nem szavazza meg, akkor a másik két játékos együttesen sem képes erre.

Lehetséges csatlakozási sorrendek						
Játékos	A-B-C	A-C-B	B-A-C	B-C-A	C-A-B	C-B-A
A	0	0	1	1	1	1
B	1	0	0	0	0	0
C	0	1	0	0	0	0

1. táblázat. Határ-hozzájárulások a 2.1. példában.

A Banzhaf-index kiszámításához a *kritikus* játékost kell meghatároznunk. Ehhez először a nyertes koalíciókat kell megvizsgálnunk, ezek azok a koalíciók, amelyek elérik a szavazási küszöböt. A kritikus játékos az, aki kilépésével egy győztes koalíciót vesztesévé változtat. A 2. táblázat tartalmazza a győztes koalíciókat és a kritikus játékosokat. A nagykoalíció esetén csak A játékos kritikus, B-nek és C-nek együtt sincs meg a kellő súlya. A kéttagú győztes koalíciókból azonban bárki lép ki, veszítenek. Tehát összesen öt esetben kritikus valamelyik játékos, az A háromszor, B és C pedig egyszer-egyszer. Így A Banzhaf-indexe $3/5$, B és C indexe $1/5$. A Banzhaf-index segítségével is megkaptuk, hogy B és C játékosok szerepe azonos. Azonban a Shapley–Shubik és a Banzhaf-indexek értéke nem egyezik meg.

A Shapley–Shubik és a Banzhaf-érték közötti hasonlóságot szemlélteti a 3. és 4. táblázat. Összesen háromféle koalíció van, amely megnyerheti a szavazást.

Nyertes koalíciók			
Játékos	ABC	AB	AC
A	1	1	1
B	0	1	0
C	0	0	1

2. táblázat. Kritikus játékosok a 2.1. példában.

A táblázatokban szerepeltettük az egyes koalíciókhoz tartozó pivot, illetve kritikus játékosokat a megfelelő súlyokkal. Például az ABC koalícióban A játékos két esetben pivot, ha a sorrend BCA, illetve CBA, ezért súlya $1/3$. A Banzhaf-féle megközelítésben azonban nem számít a sorrend, ezért a súlya $1/2^{3-1} = 1/4$. Látható, hogy a pivot és kritikus játékosok megegyeznek, azonban a Shapley-féle megközelítés a nagyobb koalíciókhoz nagyobb súlyt rendel. Az egyes játékosok megfelelő értékei a sorösszegek. Tehát A játékos Banzhaf-értéke $3/4$, B és C játékosé $1/4$. Ezeket normalizálva kapjuk meg a Banzhaf-indexüket.

Nyertes koalíciók			
Játékos	ABC	AB	AC
A	$1/3$	$1/6$	$1/6$
B	0	$1/6$	0
C	0	0	$1/6$

3. táblázat. Shapley–Shubik-indexek a 2.1. példában.

Nyertes koalíciók			
Játékos	ABC	AB	AC
A	$1/4$	$1/4$	$1/4$
B	0	$1/4$	0
C	0	0	$1/4$

4. táblázat. Banzhaf-értékek a 2.1. példában.

2.2. Példa. Az Európai Unió elődjében, az Európai Gazdasági Közösségben a hat alapító ország már alkalmazta a súlyozott minősített többségi szavazást. A

nagyok (Franciaország, Németország, Olaszország) súlya 4, a közepeseké (Belgium, Hollandia) 2, a legkisebb tagállamé (Luxemburg) 1 volt. A döntési küszöb 12.

Tagállam	Súly	S-S index (%)	Banzhaf index (%)
Franciaország	4	23,33	23,80
Németország	4	23,33	23,80
Olaszország	4	23,33	23,80
Belgium	2	15,00	14,29
Hollandia	2	15,00	14,29
Luxemburg	1	0	0

5. táblázat. Döntéshozás az 1958-as Miniszterek Tanácsában [15].

A 5. táblázat tartalmazza a tagállamok súlyát, Shapley–Shubik (itt, és a továbbiakban S-S) és Banzhaf-indexeit. Látható, hogy Luxemburg befolyása mindkét hatalmi mérték szerint nulla, hiszen nincs olyan helyzet, amikor egy döntés rajta múlna.

Költségvetésre lefordítva, a Shapley–Shubik és Banzhaf-hatalmi indexek megmutatják egy ország befolyását egy euró elköltésére. Figyelembe kell azonban vennünk, hogy a kilépő ország befizetése is elveszik. Így a szavazással felosztható díj, a költségvetés csökken. Ezért kiigazítottuk a hatalmi mértékeket az alábbi hányadossal:

$$\frac{\text{eredeti költségvetés} - \text{kilépő befizetése}}{\text{eredeti költségvetés}}.$$

Természetesen a kiigazított hatalmi indexek összege már nem 1, hanem a kiigazítási hányados, de így is kifejez egyfajta méltányos pénzügyi részesedést. A kiigazított indexek használatát a 2.2. példán keresztül ismertetjük. Az EGK költségvetéséhez Franciaország, Németország és Olaszország 28%-kal, Belgium és Hollandia 7,9%-kal, Luxemburg pedig 0,2 %-kal járult hozzá [6]. Luxemburg kilépésével, ha a szavazási küszöb továbbra is 12 marad, a bennmaradó országok Shapley–Shubik-indexe nem változik. Viszont Luxemburg befizetésével csökken a költségvetés, ezért a kiigazított Shapley–Shubik-indexek kisebbek lesznek, a kiigazítási arányszám 0,998. A kilépés okozta befolyásváltozás megegyezik ezzel az értékkel. Mivel a kilépő Luxemburnak nem volt hatása a szavazásra, Banzhaf-indexszel is pontosan ugyanezt az eredményt kapnánk, a résztvevők ereje 0,2%-kal csökken.

Látványosabb a változás, ha egy nagy ország, például Franciaország lép ki. Mivel ebben az esetben a bennmaradók összsúlya 13-ra csökken, nem valószínű, hogy továbbra is 12 maradna a küszöb. Az eredeti kvóta körülbelül 70%-os

Tagállam	S-S-index kilépés előtt (%)	S-S-index kilépés után (%)	Kiigazított S-S-index (%)
Franciaország	23,33	23,33	23,25
Németország	23,33	23,33	23,25
Olaszország	23,33	23,33	23,25
Belgium	15,00	15,00	14,97
Hollandia	15,00	15,00	14,97

6. táblázat. Luxemburg kilépésének hatása az 1958-as Miniszterek Tanácsából (2.2. példa), Shapley–Shubik-index.

volt, ezen logika mentén haladva az új küszöbnek 9-et választottuk. Franciaország kilépésével a költségvetés 28%-kal csökken, ezért a kiigazítási arányszám 0,72. A 7. táblázatban a Shapley–Shubik-index, a 8. táblázatban a Banzhaf-index használatával kapott eredményeink láthatók. A kilépés egyetlen nyertese Luxemburg, a többi ország rosszul jár.

Tagállam	S-S-index kilépés előtt (%)	S-S-index kilépés után (%)	Kiigazított S-S-index (%)
Németország	23,33	30,00	21,60
Olaszország	23,33	30,00	21,60
Belgium	15,00	13,33	9,60
Hollandia	15,00	13,33	9,60
Luxemburg	0	13,33	9,60

7. táblázat. Franciaország kilépésének hatása az 1958-as Miniszterek Tanácsából (2.2. példa), Shapley–Shubik-index.

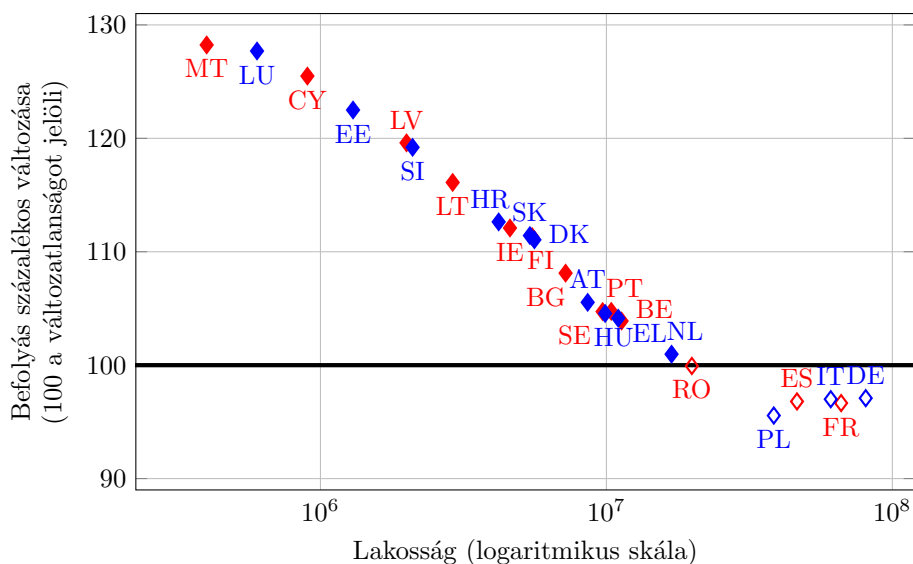
3. Eredmények

A fejezetben ismertetjük az eredményeinket. A hatalmi változásokat a kiigazított indexeknek a kilépés előtti indexekhez viszonyított százalékos arányával mérjük. A számításokhoz szükséges, 2015-re vonatkozó lakosságadatokat az Eurostat adatbázisából vettük [9]. A költségvetési adatokat az Európai Parlament honlapjáról töltöttük le [8]. A számítások elvégzéséhez IOP–Indices of Power programot

Tagállam	Banzhaf-index kilépés előtt (%)	Banzhaf-index kilépés után (%)	Kiigazított Banzhaf-index (%)
Németország	23,80	30,43	21,91
Olaszország	23,80	30,43	21,91
Belgium	14,29	13,04	9,39
Hollandia	14,29	13,04	9,39
Luxemburg	0	13,04	9,39

8. táblázat. Franciaország kilépésének hatása az 1958-as Miniszterek Tanácsából (2.2. példa), Banzhaf-index.

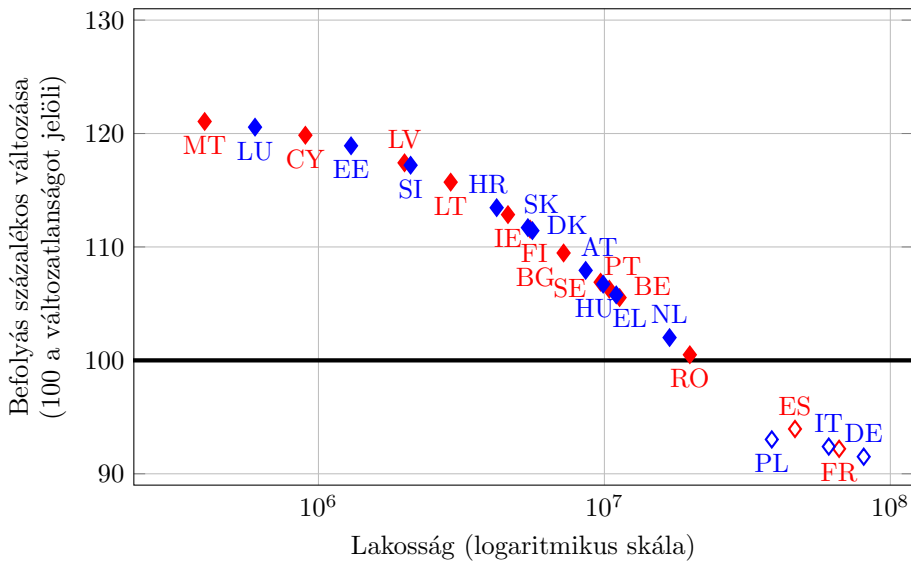
használtuk [2]. Mivel az IOP program nem képes nagy számokat kezelni, ezért a számoláshoz a lakosságadatokat százezres nagyságrendben adtuk meg. A felhasznált adatok és a jelenlegi (Brexit utáni) helyzet Shapley–Shubik-indexei megtalálhatóak a Függelékben.



1. ábra. Csehország kilépésének (Czexit) hatása, kiigazított Shapley–Shubik-index.

Az egyes országok hatalmi befolyásának változását Csehország példáján keresztül mutatjuk be: az 1. ábrán a kiigazított Shapley–Shubik-indexszel számolva,

a 2. ábrán pedig kiigazított Banzhaf-indexszel (az országok nevének kétbetűs rövidítései megtalálhatók a Függelékben).



2. ábra. Csehország kilépésének (Czexit) hatása, kiigazított Banzhaf-index.

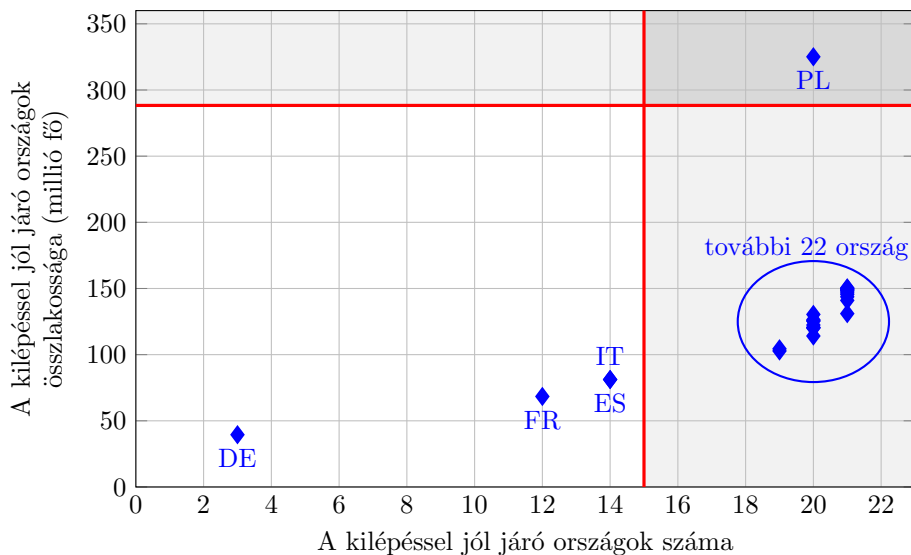
Az ábrák vízszintes tengelyén a logaritmikus skálán mért lakosság, míg függőleges tengelyén a befolyás változása látható. A kiigazítás szerepe, hogy a költségvetés csökkenésének mértékével arányosan csökkenti a befolyásváltozásokat. Ahogy a két ábrán látható, az alacsony népességű országok járnak jól, és ez nem csak a cseh, hanem bármely más kilépésre is igaznak bizonyult. A különböző indexszekkel mérve azonban más-más mértékű befolyásváltozást kapunk. A sorrend csak néhány ország esetén tér el. A kiigazított Shapley–Shubik-indexszel számolva Lengyelország hatalma csökken a legnagyobb mértékben, míg a kiigazított Banzhaf-indexszel nézve azt kapjuk, hogy Németországnak árt leginkább a cseh kilépés.

A továbbiakban a P-hatalom megközelítésnek jobban megfelelő Shapley–Shubik-indexre korlátozzuk vizsgálatainkat. Kóczy [18, 19] szintén a kiigazított Shapley–Shubik-indexet használta mérőeszköznek. A Brexittel kapcsolatban éppen ellentétes hatást talált: a nagy országok hatalma nőtt. Azt, hogy kis vagy nagy országok járnak jól, a kiigazítás nem befolyásolja, a Shapley–Shubik-indexek változása határozza meg.

Az eltérő eredmények magyarázata, hogy a Brexittel szemben a következő kilépés nem változtatja meg a szavazás tagállam korlátját. A brit kilépés után 27 tagállam maradt az EU-ban. Ebben az esetben legalább 15 tagállam egyetértésére

van szükség, hogy egy kérdés elfogadásra kerülhessen. Egy újabb kilépés után már csak 26 tagállam marad, viszont ebben az esetben is kell 15 tagállam egyetértése. Azaz, a lakosság korlát csökken, a tagállam korlát nem változik. Ez pedig a kis országoknak kedvez, melyek lakossággal alig rendelkeznek, így ebből a szempontból nem tudnak lényegesen hozzájárulni egy koalícióhoz, viszont a tagállam korlát elérésében teljes értékűnek számítanak. Több olyan koalíció lesz, melyek elérik a lecsökkent lakossági korlátot, viszont éppen egy szavazat hiányzik nekik a tagállam korláthoz. Ha egy ilyen koalícióhoz csatlakozik egy kis ország, akkor vele együtt már döntésképesek, így határ-hozzájárulása 1 lesz. Mivel csökkent lakossági korláttal több ilyen lehetőség van, a kis országok Shapley-értéke, azaz befolyásuk nő. A Brexit esetén viszont változott a tagállam korlát is, így abban a forgatókönyvben inkább a nagy országok jártak jobban. Ez az eredmény független a kilépő ország költségvetési hozzájárulásától.

Málta és Luxemburg, a két legkisebb ország befolyása bármelyik tagállam kilépése esetén nő. A következő hét kisebb ország: Ciprus, Észtország, Horvátország, Írország, Litvánia, Lettország és Szlovénia befolyása csak Németország kilépése esetén csökken. Magyarország ebből a szempontból a közepes méretű országokhoz tartozik, melyek befolyása nagy országok kilépése esetén csökken, bármely más esetben nő, de csak csekély mértékben. Ilyen közepes méretű ország még: Ausztria, Belgium, Bulgária, Dánia, Finnország, Görögország, Hollandia,



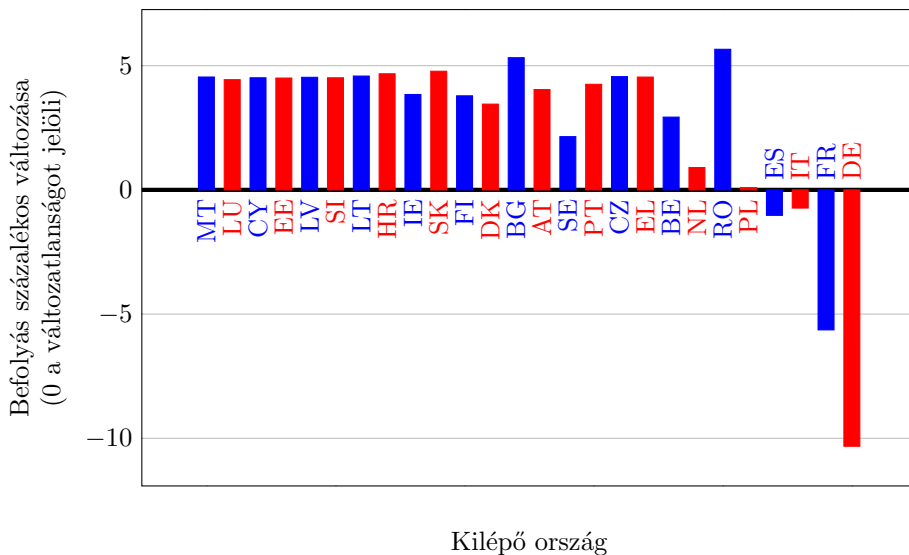
3. ábra. EU-tagállamok kilépésének hatása, kiigazított Shapley–Shubik-index.

Portugália, Svédország és Szlovákia. Románia és Lengyelország hatalma marginális mértékben változik.

A négy igazán nagy ország, Franciaország, Németország, Olaszország és Spanyolország befolyása csak akkor nem csökken, ha valamelyikőjük, vagy ha Lengyelország lép ki. Lengyelország helyzete sajátos, ahogy a következő 3. ábráról is kiderül. Közepes méretű országnak túl nagy, de az említett nagy államoknál kisebb.

A 3. ábrán látható, hogy az egyes országok kilépésével hány bennmaradó tagállam befolyása nőne, és ezeknek mekkora az összlakosságuk. Például a magyar kilépéssel 21 ország járna jól, lakosságuk azonban csak 141 millió fő. Az Egyesült Királyság nélküli Európai Unió Tanácsában a döntéshozáshoz 15 tagállam egyetértésére van szükség, akik legalább 288 millió lakost képviselnek. A vastag vonalak ezt a két határt jelölik. 23 olyan ország van, amelynek a kilépésével több mint 15 állam befolyása növekszik. Azonban Lengyelország az egyetlen, amire a lakosságkorlát is teljesül. Ha kilépne, a teljes EU lakosság 82%-ának növekedne a befolyása az Unió költségvetésére. Ennek oka, hogy Lengyelország, nagy méretéhez képest alacsony költségvetési befizetéssel rendelkezik. Amikor kilép, mindenki (kiigazítás nélküli) Shapley–Shubik-indexe növekszik, és a kiigazított érték is csak 6 ország esetén kisebb, mint a kilépés előtti.

A 4. ábrán szerepel, hogy hány százalékkal változna a magyar befolyás az egyes



4. ábra. Magyarország befolyásának változása, kiigazított Shapley–Shubik-index.

kilépések hatására. Leginkább Németország kilépése érintené rosszul hazánkat, mivel még a lakosság méretéhez képest is nagy a befizetése. A legtöbb kilépés a magyar befolyás növekedését eredményezné, azonban csak nagyon kis mértékben.

4. Összefoglalás

Tanulmányunkban Kóczy [16, 17, 18, 19] módszertanát követtük, aki a Shapley–Shubik-indexet használta a szavazási erő mérésére. Míg Kóczy [18, 19] azt találta, hogy a Brexit után nő a nagy országok befolyása, a fentiekben belátuk, hogy egy következő kilépés inkább a kis országoknak lenne előnyös. Ezeknek az országoknak kedvez, hogy 27, illetve 26 tagállam esetén is legalább 15 ország támogatása szükséges a szavazás eredményességéhez, viszont a kilépéssel a népeségkorlát csökken. Magyarország a közepes méretű országokhoz tartozik, így kis mértékben, de az esetek többségében jobban járna egy kilépéssel. Csupán négy olyan forgatókönyv van, amely csökkentené a befolyását, ha valamelyik nagy ország (Franciaország, Németország, Olaszország vagy Spanyolország) lépne ki. Felfedezhető egy általános mintázat: egy olyan kilépés, ami nem változtatja a tagállam kvótát, a kis országok befolyását fogja növelni, míg egy tagállam kvótát csökkentő kilépés a nagy országoknak kedvez.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki Biró Péternek és Sziklai Balázsnak a javaslataikért, illetve két anonim bírálónak a kéziratához fűzött megjegyzéseikért, valamint az NKFIH K-128573 pályázatának a támogatásáért.

Petróczy Dóra Gréta köszönetet mond a Pallas Athéné Domus Educationis Alapítványnak az anyagi támogatásért.

Rogers Mark Francis köszönetét fejezi ki a Magyar Tudományos Akadémiának, a Milestone Intitutenak és a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumnak.

Függelék

Tagállamok	Rövidítés	Lakosság (százezer fő)	Lakosság- arány	Befizetési arány	S-S-index
Ausztria	AT	86	1,93%	1,51%	2,02%
Belgium	BE	113	2,56%	3,52%	2,41%
Bulgária	BG	72	1,62%	0,39%	1,81%
Ciprus	CY	9	0,20%	0,14%	0,92%
Csehország	CZ	105	2,38%	1,26%	2,30%
Dánia	DK	56	1,27%	2,13%	1,59%
Észtország	EE	13	0,30%	0,17%	0,98%
Finnország	FI	55	1,24%	1,71%	1,57%
Franciaország	FR	662	14,92%	18,81%	11,27%
Görögország	EL	110	2,47%	1,76%	2,37%
Hollandia	NL	169	3,80%	6,14%	3,27%
Horvátország	HR	42	0,96%	0,37%	1,39%
Írország	IE	46	1,04%	1,37%	1,44%
Lengyelország	PL	385	8,68%	3,39%	6,42%
Lettország	LV	20	0,45%	0,23%	1,07%
Litvánia	LT	29	0,65%	0,31%	1,20%
Luxemburg	LU	6	0,13%	0,22%	0,88%
Magyarország	HU	99	2,22%	0,86%	2,21%
Málta	MT	4	0,10%	0,06%	0,85%
Németország	DE	807	18,19%	24,81%	14,44%
Olaszország	IT	609	13,74%	13,81%	10,25%
Portugália	PT	104	2,34%	1,57%	2,28%
Románia	RO	199	4,49%	1,30%	3,74%
Spanyolország	ES	464	10,46%	9,59%	7,56%
Svédország	SE	97	2,19%	3,68%	2,18%
Szlovákia	SK	54	1,22%	0,60%	1,56%
Szlovénia	SI	21	0,47%	0,31%	1,09%

Hivatkozások

- [1] BANZHAF, J. F.: *Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis*, Rutgers Law Review, Vol. **19** No. **2**, pp. 317-343 (1965).
- [2] BRÄUNINGER, T. AND KÖNIG, T.: *Indices of Power IOP 2.0* (2005).
<http://www.tbraeuninger.de/download/>
- [3] COLEMAN, J. S.: *Control of collectives and the power of a collectivity to act*, in: LIEBERMAN, B. (ed.), *Social Choice*, pp. 192-225, New York: Gordon and Breach (1971).
- [4] COUNCIL OF THE EUROPEAN UNION: *Qualified majority voting* (2017),
<http://www.consilium.europa.eu/en/council-eu/voting-system/qualified-majority/>.
- [5] CSÓKA, P.: *Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció*, Közgazdasági Szemle, Vol. **50** No. **10**, pp. 855-880 (2003).
- [6] EUROPEAN COMMISSION: *European Union Public Finance*, 4th edn., European Communities (2008).
- [7] EUROPEAN COUNCIL: *Voting calculator*,
<http://www.consilium.europa.eu/hu/councileu/voting-system/voting-calculator/>.
- [8] EUROPEAN PARLIAMENT: *EU budget explained: expenditure and contribution by member state* (2015), <http://www.europarl.europa.eu/news/en/headlines/eu-affairs/20141202IFG82334/eu-budget-explained-expenditure-and-contribution-by-member-state/>. Letöltve: 2017.01.20.
- [9] EUROSTAT: *EUROPOP2013 - Convergence scenario, national level, population predictions* [tps00002] (2014),
<http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=tps00002&lang=en>.
Letöltve: 2017.01.06.
- [10] FELSENTHAL, D. AND MACHOVER, M.: *The weighted voting rule in the EU's Council of Ministers 1958-95: Intentions and outcomes*, Electoral Studies, Vol. **16** No. **1**, pp. 33-47, (1997).
- [11] FELSENTHAL, D. AND MACHOVER, M.: *The measurement of voting power: Theory and practice, problems and paradoxes*, Cheltenham: Edward Elgar (1998).
- [12] FELSENTHAL, D. AND MACHOVER, M.: *The Treaty of Nice and qualified majority Voting*, Social Choice and Welfare, Vol. **18** No. **3**, pp. 431-464 (2001).
- [13] FELSENTHAL, D. AND MACHOVER, M.: *A priori voting power: What is it all about?*, Political Studies Review, Vol. **2** No. **1**, pp. 1-23 (2004).
- [14] HERNE, K. AND NURMI, H.: *The distribution of a priori voting power in the EC Council of Ministers and the European Parliament*, Scandinavian Political Studies, Vol. **16** No. **3**, pp. 269-284 (1993).
- [15] KÓCZY, L. Á.: *Measuring voting power: The paradox of new members vs. the null player axiom*, in: RUDAS, I. J., FODOR, J., and KACPRZYK, J. (eds.), *Towards Intelligent Engineering and Information Technology*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 67-78 (2009).
- [16] KÓCZY, L. Á.: *Lisszaboni kilátások*, Közgazdasági Szemle, Vol. **58** No. **6**, pp. 1045-1058 (2011).

- [17] KÓCZY, L. Á.: *Beyond Lisbon: Demographic trends and voting power in the European Union Council of Ministers*, Mathematical Social Sciences, Vol. **63** No. **2**, pp. 152-158 (2012).
- [18] KÓCZY, L. Á.: *How Brexit affects European Union power distribution* (2016), Discussion Papers (MT-DP-2016/11), Institute of Economics, Centre for Economic and Regional Studies, Hungarian Academy of Sciences, Budapest.
- [19] KÓCZY, L. Á.: *Döntési befolyás az Európai Unió Tanácsában: Mit hozhat a Brexit?*, Alkalmazott Matematikai Lapok, (megjelenés alatt).
- [20] KÓCZY, L. Á. ÉS PINTÉR, M.: *Az ellenzék ereje - általánosított súlyozott szavazási játékok*, Közgazdasági Szemle, Vol. **58** No. **6**, pp. 543-551 (2011).
- [21] LYONS, K. AND DARROCH, G.: *Frexit, Nexit or Oexit? Who will be next to leave the EU*, *The Guardian*, <https://www.theguardian.com/politics/2016/jun/27/frexitnexit-or-oexit-who-will-be-next-to-leave-the-eu/>. Letöltve: 2018.01.20.
- [22] PENROSE, L.: *The elementary statistics of majority voting*, Journal of the Royal Statistical Society, Vol. **109** No. **1**, pp. 53-57 (1946).
- [23] PINTÉR, M.: *Regressziós játékok*, Sigma, Vol. **37** No. **3-4**, pp. 131-148 (2007).
- [24] PINTÉR, M.: *A Shapley-érték axiomatizálásai*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **26** No. **3**, pp. 289-315 (2009).
- [25] SHAPLEY, L. S.: *A value for n-person games*, in: KUHN, H. W. and TUCKER, A. W. (eds.), Contributions to the Theory of Games Volume 77, Vol. **28** of Annals of Mathematical Studies, pp. 307-317, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1953).
- [26] SHAPLEY, L. S. AND SHUBIK, M.: *A method for evaluating the distribution of power in a committee system*, American Political Science Review, Vol. **48** No. **3**, pp. 787-792 (1954).
- [27] SOLYMOSI, T.: *Kooperatív játékok*, Magyar Tudomány, Vol. **2009** No. **5**, pp. 547-558 (2009).
- [28] STRAFFIN JR., P. D.: *Homogeneity, independence, and power indices*, Public Choice, Vol. **30** No. **1**, pp. 107-118 (1977).
- [29] VARELA, D. AND PRADO-DOMINGUEZ, J.: *Negotiating the Lisbon Treaty: Redistribution, efficiency and power indices*, Czech Economic Review, Vol. **6** No. **2**, pp. 107-124 (2012).
- [30] WARNTJEN, A.: *Do votes matter? Voting weights and the success probability of member state requests in the Council of the European Union*, Journal of European Integration, Vol. **39** No. **6**, pp. 673-687 (2017).
- [31] WIDGRÉN, M.: *Voting power in the EC decision making and the consequences of two different enlargements*, European Economic Review, Vol. **38** No. **5**, pp. 1153-1170, (1994).



Petróczy Dóra Gréta 1990-ben született. 2012-ben diplomázott gazdaságelemzés alapszakon a Budapesti Corvinus Egyetemen. 2014-ben végzett az Eötvös Loránd Tudományegyetem közgazdasági elemző mesterképzésén. 2014 szeptembere óta a Budapesti Corvinus Egyetem Általános és Kvantitatív Közgazdaságtan Doktori Iskola hallgatója, témavezetője Csató László. 2014 és 2018 között a Pallas Athéné Domus Scientiae Alapítvány ösztöndíjasa. 2019 februárjában elnyerte az Új Nemzeti Kiválóság Program ösztöndíját. Jelenleg a Budapesti Corvinus Egyetem, Gazdálkodástudományi Kar, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék tanársegédje. Kutatási területe a játékelmélet, 4 magyar nyelvű cikk szerzője.

PETRÓCZY DÓRA GRÉTA

Budapesti Corvinus Egyetem
doragreta.petroczy@uni-corvinus.hu



Rogers Mark Francis a Budapesti Fazekas Mihály Gimnáziumban érettségizett 2018-ban. A 2018/19-es tanévben az Osztrák Tudományos Akadémia Kvantuminformációelméleti Intézetében (IQOQI) kutatósegéd. 2019 szeptemberétől kezdve a manchesteri egyetemen tanul matematikát.

ROGERS MARK FRANCIS

Institute for Quantum Optics and Quantum Information, Austrian Academy of Sciences
mark.rogers@oeaw.ac.at



Kóczy Á. László 1976-ban született Budapesten. Matematikus BA (University of Cambridge, 1997), közgazdász MSc (KU Leuven, 1999), majd PhD (KU Leuven, 2003) fokozatot szerzett. 2003-2009 között adjunktus a Maastrichti Egyetemen, 2007- 2019 között főiskolai tanár a Budapesti Műszaki Főiskolán, majd docens az Óbudai Egyetemen. 2010-ben az MTA Lendület Programjának támogatásával megalakította az MTA Közgazdaság-tudományi Intézetben a Játékelméleti Kutatócsoportot, azóta az intézet tudományos főmunkatársa, 2019 óta a BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Karának docense. Tagja az MTA Közgazdaság-

tudományi Bizottságának és az MTMT Tudományometriai Szakbizottságának. A Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület alapító tagja, korábbi elnöke, a Game Theory Society, a Society for Social Choice and Welfare, az Econometric Society, a European Economic Association tagja.

Kutatási területe a játékelmélet. Egy könyv, 27 angol, 11 magyar nyelvű cikk szerzője, független hivatkozásainak száma 350, h-indexe 9.

KÓCZY Á. LÁSZLÓ

Magyar Tudományos Akadémia Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont és Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
koczy@krtk.mta.hu

EUROPEAN UNION'S POWER DISTRIBUTION AFTER A WITHDRAWAL

DÓRA GRÉTA PETRÓCZY, MARK FRANCIS ROGERS, LÁSZLÓ Á. KÓCZY

After Brexit, debates on an own EU-leaving referendum arose in several other member countries. From the impact of a departure, we inspect one factor: how the power distribution changes in the Council of the European Union. The Lisbon Treaty specified the qualified majority voting procedure conditional on (1) the number of member states and (2) the population data; it does not need to be renegotiated after each entry or exit. Using the Shapley-Shubik and Banzhaf power indices, we calculated the power of all member states both with and without the member who might leave the union. We interpret power as a payoff, an influence on the Union's budget and this is naturally updated removing the departed members' contributions. Our results show a pattern connected to a change of the threshold of the required member states and the change in power distribution. An exit, which causes a change to the member state threshold of the Council of the European Union benefits large, an exit that does not cause such a change benefits small member states.

Keywords: Council of the European Union, weighted voting, power indices

Mathematics Subject Classification (2000): 91A80, 91B12

KOOPERATÍV SZTENDERD FIXFA JÁTÉKOK ÉS ALKALMAZÁSUK A VÍZGAZDÁLKODÁSBAN

RADVÁNYI ANNA RÁHEL

A cikk alapvető célja betekintést nyújtani a kooperatív játékelmélet eszköztárába, egy speciális játékosztályon, a sztenderd fixfa játékok osztályán keresztül. A napjainkban egyre népszerűbb tudományág olyan megoldási koncepciókat szolgáltat, melyek széleskörű gyakorlati alkalmazást tesznek lehetővé, többek között különböző gazdasági problémák költségelosztási kérdéseire adnak megoldási javaslatokat. A sztenderd fixfa játékok egy fa struktúrájú hálózatot reprezentálnak, ahol a hálózat csúcsai felhasználókat jelölnek, akik a hálózaton keresztül vesznek igénybe egy bizonyos szolgáltatást. A felmerülő költségek szétosztására keresünk „igazságos” elosztásokat. Az alapvető fogalmak bemutatása és a modell definiálása után konkrét vízgazdálkodási alkalmazásokat mutatunk, amelyek valós gazdasági problémákon alapulnak. A cikk a kooperatív játékelmélet egy szeletét mutatja be, ugyanakkor jól látható, hogy a specifikusan bemutatott példákon túl hasonló struktúrájú problémák modellezéséhez is hatékony megoldásokat szolgáltat.

1. Bevezetés

A kooperatív játékelmélet jelentősége elvitathatalan. A matematika, illetve a közgazdaságtan határmezsgyéjén elhelyezkedő tudományterület eszköztára lehetővé teszi számunkra, hogy olyan gazdasági szituációkat modellezzünk, elemezzünk, amelyekben a felek közötti együttműködésen, és a közösen elért eredményen van a hangsúly. Az ilyen jellegű szituációkban alapvetően két kérdéskört vizsgálunk: milyen kooperációs csoportok (koalíciók) jönnek létre, illetve hogyan tudjuk elosztani az együttműködésből eredő hasznot a résztvevő felek között. A kooperatív játékelmélet területén az utóbbi évtizedekben számos elméleti eredmény született, de fontos kiemelni, hogy ezek nem csak elméleti jellegűek, hanem a gyakorlatban is alkalmazható/alkalmazott megoldásokat szolgáltatnak. Például 1933-ban a Tennessee Valley Authority (TVA), a Tennessee-völgy gazdasági irányítására létrejövő társaság esetében, amely többek között a térség vízgazdálkodási problémáinak irányításával is foglalkozott. Költségelosztási megoldásaik között olyanok is szerepelnek, amelyek megfeleltethetők kooperatív játékelméleti megoldáskoncepcióknak, ezen eredményeket Straffin és Heaney [33], a TVA munkásságát játékelméleti szempontból is bemutató cikkében olvashatjuk. Célunk elsősorban az lesz,

hogy egy speciális játékosztályt, a sztenderd fixfa játékok osztályát bemutassuk, és példákkal szolgáljunk a vízgazdálkodás területéről származó alkalmazhatóságukra. További játékelméleti alkalmazásokat vízgazdálkodási problémákra Parrachino et al. [21] munkájában olvashatunk. A fixfa struktúrán túl számos egyéb gráfelméleti modell is alkalmazható, ilyen például a legrövidebb út játékok osztálya, melyekről bővebben például Fragnelli et al. [8], illetve Pintér és Radványi [27] cikkeiben olvashatunk.

A cikk felépítése a következő: A bevezetőt követő 2. fejezetben a TU-játékok alapvető fogalmait mutatjuk be. A 3. szakaszban ismertetjük az elosztásokra vonatkozó legfontosabb fogalmakat, valamint a mag elosztást. A 4. és 5. fejezetekben bemutatásra kerül a Shapley-érték, illetve a nukleolusz, a két legismertebb megoldáskonceptió. A 6. szakaszban definiáljuk a fixfa játékok modelljét, a 7. fejezetben pedig konkrét vízgazdálkodási alkalmazásokat mutatunk, amelyek valós gazdasági problémákon alapulnak. Ezután röviden összefoglaljuk az olvasottakat.

A következőkben tehát megismerkedünk a kooperatív játékelmélet legfontosabb alapfogalmaival és összefüggéseivel. Definícióinkban és jelöléseinkben alapvetően Peleg és Sudhölter [22] könyvére, valamint Solymosi [32] jegyzetére támaszkodunk.

2. TU-játékok

Egy koalíciós formában megadott játékot kooperatívnak nevezünk, ha egy játékban kikényszeríthető szerződések vannak. Azaz a játékosoknak lehetőségük van a kifizetés elosztásáról vagy a választott stratégiáról megállapodásokat kötni, még akkor is, ha ezeket a megállapodásokat az adott játék szabályai nem írják elő. Szerződések, illetve megállapodások kötése többek között a közgazdaságtanban elterjedt tevékenység, például minden egyfordulós eladó-vevő tranzakció egy megállapodás. Sőt, ez többlépcsős tranzakciók esetében is elmondható. Egy megállapodást általában akkor tekintünk megkötöttnek, ha a megsértése olyan (akár magas pénzbeli) büntetéssel jár, ami visszatartja a játékost a megszegéstől.

A kooperatív játékokat két csoportba soroljuk: az átruházható és az át nem ruházható hasznosságú játékok csoportjaiba. Az átruházható hasznosságúak esetében feltesszük, hogy a játékosok egyéni preferenciái egy közvetítő eszköz (pl. pénz) által összemérhetők. Így egy konkrét koalíció tagjai a koalíció által elért kifizetést szabadon feloszthatják egymás között. Követve az elterjedt elnevezést, ezeket a játékokat TU-játékoknak (transferable utility games) fogjuk hívni. Az átruházható hasznossággal nem rendelkező NTU-játékok (non-transferable utility games) esetén vagy ez a közvetítő eszköz hiányzik, vagy ha van is ilyen kompenzálást lehetővé tevő jószág, azt a szereplők nem egyforma mértékben ítélik meg. Ezen tanulmány keretében TU-játékokra szorítkozunk.

2.1. Koalíciós játékok

Legyen N a játékosok nemüres, véges halmaza, egy S koalíció pedig az N halmaz egy részhalmaza.

2.1. Definíció. Egy *átruházható hasznosságú kooperatív játék* egy olyan (N, v) pár, ahol N a játékosok véges, nemüres halmaza, v pedig egy függvény, ami az N minden S részhalmazához egy $v(S)$ valós számot rendel hozzá. Minden esetben feltesszük, hogy $v(\emptyset) = 0$.

2.1. Megjegyzés. Egy (N, v) kooperatív játékot röviden v játéknak is nevezünk. N a játékosok halmaza, v a koalíciós függvény, S pedig az N részhalmaza. Ha az S koalíció létrejön a v játékban, akkor a koalíció tagjai megkapják a $v(S)$ értéket, amely számot a *koalíció értékének* nevezünk.

2.2. Megjegyzés. Egy adott S koalíció a $v(S)$ értéket tetszés szerint szétoszthatja tagjai között. Egy $x \in \mathbb{R}^S$ kifizetés *megvalósítható*, ha kielégíti a

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$$

egyenlőtlenséget. Az átruházható hasznosság valójában azt a tényt takarja, hogy az S koalíció el tud érni minden megvalósítható kifizetést, illetve, hogy a hasznosságok összege a koalíció hasznossága.

A kooperatív játékok legtöbb alkalmazásában általában egyének, vagy egyének bizonyos csoportjai (például szakszervezetek, városok, nemzetek) töltik be a játékosok szerepét. Néhány érdekes közgazdasági játékelméleti modellben a játékosok azonban nem egyének, hanem közgazdasági projektek céljai, termelési tényezők, illetve egyéb szituációk közgazdasági változói.

2.2. Definíció. Egy (N, v) játék *szuperadditív*, ha

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

minden $S, T \subseteq N$ és $S \cap T = \emptyset$ esetén. (Fordított reláció fennállása esetén szubadditív játékról beszélünk.)

Amennyiben az $S \cup T$ koalíció létrejön, tagjai dönthetnek úgy, mintha S és T külön-külön jöttek volna létre, ekkor a $v(S) + v(T)$ kifizetést érik el. Mindazonáltal a szuperadditivitás sokszor sérül. Léteznek trösztellenes törvények, melyek az $S \cup T$ koalíció profitját csökkentenék, ha a koalíció létrejönne.

2.3. Definíció. Egy (N, v) játék *konvex*, ha

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

minden $S, T \subseteq N$ esetén.

Nyilvánvaló, hogy egy konvex játék szuperadditív is. A következő ekvivalens karakterizáció könnyen meggondolható: egy (N, v) játék pontosan akkor konvex, ha $\forall i \in N$ -re

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

$\forall S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ esetén.

Tehát egy játék akkor és csak akkor konvex, ha a játékosoknak egy koalícióhoz való egyéni határhozzájárulásai $(v(S \cup \{i\}) - v(S))$ monoton növekednek. Konvex játékok többek között a konkáv költségjátékokhoz kapcsolódó megtakarítási játékok is, ezekkel később foglalkozunk még.

2.4. Definíció. Egy (N, v) játék *konstans összegű*, ha $\forall S \subseteq N$ -re

$$v(S) + v(N \setminus S) = v(N).$$

Konstans összegű játékokkal már a játékelmélet kezdeti szakaszaiban is sokat foglalkoztak (Neumann [37]).

2.5. Definíció. Egy (N, v) játék *lényeges*, ha $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

2.6. Definíció. Egy (N, v) játék *additív*, ha $\forall S \subseteq N$ esetén $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$.

Az additív játékok nem lényeges játékok, ezek a játékelmélet szemszögéből triviálisnak mondhatóak. Ha ugyanis minden $i \in N$ játékos igénye legalább $v(\{i\})$, akkor a $v(N)$ érték elosztása egyértelműen meghatározott.

2.3. Megjegyzés. Legyen N a játékosok, \mathbb{R} a valós számok halmaza. Jelölje \mathbb{R}^N az N -ből \mathbb{R} -be menő függvények halmazát. Ha $x \in \mathbb{R}^N$ és $S \subseteq N$, akkor $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

2.4. Megjegyzés. Legyen N a játékosok halmaza, $x \in \mathbb{R}^N$, az eddigiek szerint tekintsük x -et mint koalíciós függvényt. Így (N, x) koalíciós formában adott játék, ahol $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ minden $S \subseteq N$ -re.

2.7. Definíció. Egy (N, v) játék *0-normalizált*, ha $v(\{i\}) = 0 \forall i \in N$ -re.

2.2. Költségallokációs játékok

Legyen N a játékosok halmaza. A költségallokációs probléma egy (N, v_c) játékból indul, ahol N a játékosok halmaza, a v_c koalíciós függvény pedig a problémához tartozó költségfüggvény. Intuitív módon N lehet egy közmű vagy középület potenciális felhasználóinak halmaza. Minden felhasználót egy adott szinten, vagy

egyáltalán nem szolgálunk ki. Legyen $S \subseteq N$. Ekkor $v_c(S)$ reprezentálja az S tagjainak kiszolgálásához szükséges minimális költséget. Az (N, v_c) játékot *költségjátéknak* nevezzük. Célunk pedig majd az lesz, hogy a játék által leírt szituációban az összköltség egy valamilyen módon igazságos elosztását adjuk meg a felhasználók között.

Az (N, v_c) költségjátékok kapcsolatba hozhatók az (N, v) koalíciós játékok közül az ún. *megtakarítási játékokkal*, amelyek esetében $v_s(S) = \sum_{i \in S} v_c(\{i\}) - v_c(S)$

minden $S \subseteq N$ esetén. (Számos alkalmazás kapcsolatba hozható a TU-játékok jól ismert alosztályaival, például a költségjátékok megegyeznek a nemnegatív, szubadditív, a megtakarítási játékok pedig a 0-normalizált, nemnegatív, szuperadditív játékok osztályával, ld. Driessen [7].)

Legyen (N, v_c) egy költségjáték, (N, v_s) pedig a hozzá tartozó megtakarítási játék. Ekkor (N, v_c) :

- *szubadditív*, vagyis

$$v_c(S) + v_c(T) \geq v_c(S \cup T)$$

minden $S, T \subseteq N$ és $S \cap T = \emptyset$ esetén pontosan akkor, ha (N, v_s) szuperadditív;

- *konkáv*, vagyis

$$v_c(S) + v_c(T) \geq v_c(S \cup T) + v_c(S \cap T)$$

minden $S, T \subseteq N$ esetén pontosan akkor, ha (N, v_s) konvex.

Az alkalmazásokban a költségjátékok többnyire szubadditívak (és monotonok) (ld. Lucas [16], Young [38], illetve Driessen [36] tanulmányait a költségjátékokról).

2.2.1. Megyei költségelosztási probléma

Tekintsük példaképp a következő szituációt. Városok egy N csoportjának (azaz egy megyének) lehetősége van közös vízellátó rendszer építésére. Minden városnak van egy minimum vízigénye, amit vagy a saját elosztórendszerükkel, vagy néhány másik, esetleg az összes többi várossal közös rendszer segítségével elégítenek ki. Egy $S \subseteq N$ koalíció alternatív vagy egyéni $v_c(S)$ költsége az a minimális költség, mellyel az S tagjainak igényei a lehető leghatékonyabb módon kielégíthetők. Abból a tényből kiindulva, hogy egy $S \subseteq N$ halmazt számos különböző alrendszer szolgálhat ki, szubadditív költségjátékhoz jutunk. Ilyen játékok vizsgálatával többek között Suzuki és Nakayama [34], illetve Young et al. [39] foglalkozott.

3. Kifizetések és a mag

A gyakorlatban előforduló problémák kapcsán nemcsak azt fontos megvizsgálni, hogy egy adott koalíció létrejön-e, illetve melyek azok a koalíciók, amelyek létrejönnek. Lényeges továbbá az is, hogy az adott koalíció tagjai meg tudnak-e egyezni abban, hogy a koalíció által elért összhassznot mindenki számára elfogadható módon osszák szét egymás között. Ezt az elosztást nevezzük majd a játék megoldásának.

Gyakran előfordul, hogy a játékosok akkor érik el a legnagyobb kifizetést, ha egyedül a nagykoalíció jön létre. Például a szuperadditív játékokkal modellezhető esetekben minden közös taggal nem rendelkező koalíciónak érdemes egyesülnie, mert ezáltal nagyobb összhasszonra tehetnek szert. Így végül minden játékos a nagykoalíció mellett fog dönteni. Ez azonban nem mindig egyértelmű. Például a csak 0-monoton vagy lényeges játékkal modellezhető helyzetekben előfordulhat, hogy a játékosok egy valódi részhalmazának előnyösebb a belőlük álló koalíciót választani a nagykoalícióval szemben.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy a nagykoalíció létrejön, azaz minden játékos számára előnyösebb egyetlen koalícióba szerveződni. Ekkor a feladat az elért maximális összhasszon mindenki számára „kielégítő” módon történő szétosztása.

3.1. Definíció. Az (N, v) játékban a $v(N)$ érték elosztása során keletkező $x_i \in \mathbb{R}$ értéket az $i \in N$ játékos *kifizetésének* nevezzük.

A v koalíciós függvény által leírt kooperatív játék egy lehetséges kimenetelét a játékosok kifizetéseit tartalmazó $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ *kifizetésvektorral* jellemezzük.

3.2. Definíció. Az (N, v) játékban az $x = (x_1, \dots, x_n)$ kifizetésvektor

- *elérhető* az S koalíció számára, ha $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$,
- *elfogadható* az S koalíció számára, ha $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$,
- *előnyösebb* az S számára, mint az $y = (y_1, \dots, y_n)$ kifizetésvektor, ha $\forall i \in S$ esetén $x_i > y_i$,
- az S koalíción *keresztül dominálja* az $y = (y_1, \dots, y_n)$ kifizetésvektort, ha az S számára x elérhető, és egyben előnyösebb, mint y (ezt x dom_S y -nal fogjuk jelölni),
- *nem dominált* az S koalíción *keresztül*, ha nincs az S számára olyan elérhető z kifizetésvektor, amire $z \text{ dom}_S x$,
- *dominálja* az y kifizetésvektort, ha létezik olyan S koalíció, amelyre $x \text{ dom}_S y$ (ezt x dom y -nal fogjuk jelölni),
- *nem dominált*, ha egyetlen S koalíción *keresztül* sem dominált.

Az *elérhető*, *elfogadható* és *előnyösebb* fogalmak pusztán azokat a természetes elvárásokat tükrözik, hogy egy koalíció tagjai a $v(S)$ érték elosztása során csak olyan kifizetéseket tudnak megvalósítani, amik nem haladják meg a koalíció által elért összhásznot. Ezen felül pedig minden játékos szeretné egyéni hasznát maximalizálni, így a számára előnyösebb kifizetést szeretné választani.

A *dominancia* fogalma pedig azt próbálja megragadni, hogy a játékosok szabadon dönthetnek arról, hogy mely koalíció(k)ban kívánnak részt venni, és egy adott koalíció csak akkor jön létre, ha tagjai azt egyöntetűen akarják.

3.1. Megjegyzés. Fennállnak az alábbi összefüggések:

1. Az x kifizetésvektor pontosan akkor elfogadható az S koalíció számára, ha x S -en keresztül nem dominált.
2. Tetszőleges $S \subseteq N$ esetén a dom_S aszimmetrikus, irreflexív és tranzitív reláció.
3. A dom reláció mindig irreflexív, de még egy szuperadditív játékban sem feltétlenül aszimmetrikus vagy tranzitív.

3.1. A mag

A mag ([30], [9]) a kooperatív játékelmélet egyik alapvetően fontos fogalma. Segítségével megfoghatóbbá válik, hogy egy játékban melyek lesznek azok az elosztások, amiket egy adott koalíció tagjai megoldásként elfogadnak. Tekintsük az alábbi definíciót!

3.3. Definíció. Az (N, v) játékban az $x = (x_1, \dots, x_n)$ kifizetésvektor

- *szétosztás*, ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, vagyis az N koalíció számára elfogadható és elérhető,
- *elosztás (imputáció)*, ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, és $x_i \geq v(\{i\}) \forall i \in N$ -re, azaz olyan szétosztás, ami minden egyszemélyes koalíció (azaz minden játékos) számára elfogadható,
- *mag elosztás*, ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, és $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \forall S \subseteq N$ esetén, azaz olyan szétosztás, ami minden koalíció számára elfogadható.

Egy (N, v) játékban a szétosztások halmazát $I^*(N, v)$ -vel, az elosztások halmazát $I(N, v)$ -vel, a mag elosztások halmazát pedig $C(N, v)$ -vel jelöljük. Ez utóbbi $C(N, v)$ halmazt szoktuk röviden a kooperatív játék *magjának* hívni.

A mag tehát valamiféleképpen azt fejezi ki, hogy mik azok az elosztások, melyeket egy-egy adott koalíció tagjai elég „igazságosnak” éreznek ahhoz, hogy elfogadják azt.

3.2. *Megjegyzés.* Igazak az alábbi állítások:

1. Tetszőleges (N, v) játék esetén a szétosztások $I^*(N, v)$ halmaza egy hipersík, azaz sosem üres.
2. Egy (N, v) játékban az elosztások (imputációk) $I(N, v)$ halmaza pontosan akkor nemüres, ha $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

A fentieket a következő példán keresztül szemléltetjük.

3.1. *Példa.* Legyen (N, v) egy 3-szereplős, $(0,1)$ -normalizált játék (azaz olyan 0-normalizált játék, ahol $v(N) = 1$). Az $I^*(N, v)$ szétosztáshalmaz az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ egyenlet megoldásvektoraiból álló hipersík. Az $I(N, v)$ elosztáshalmaz pedig a hipersíkon elhelyezkedő, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ csúcspontok által meghatározott egységszimplex lesz.

A mag nemürességének kérdése azonban már nem ilyen egyértelmű.

Különböztessünk meg két esetet:

1.	S	\emptyset	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
	$v(S)$	0	0	0	0	2/3	2/3	2/3	1
2.	S	\emptyset	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
	$v(S)$	0	0	0	0	1	1	1	1

Ha az 1. esetet tekintjük, akkor azt tapasztaljuk, hogy ebben az esetben a mag az egyetlen $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ kifizetésből áll. Ha viszont a 2. esetet nézzük, akkor a kétszemélyes koalíciók esetében csak akkor lesz egy $x = (x_1, x_2, x_3)$ kifizetés elfogadható, ha $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_1 + x_3 \geq 1$, $x_2 + x_3 \geq 1$ mindegyike teljesül, azaz $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{3}{2}$. Ez viszont a nagykoalíció számára nem elérhető. Ebben az esetben tehát a játék magja üres.

Az előző példa második esetében a mag azért üres, mert a nagykoalíció értéke a többi koalícióhoz képest nem „elég nagy”. További példák és egyéb megfontolások az alábbi jegyzetben olvashatók: Solymosi [32].

4. A Shapley-érték

Ebben a részben megismerkedünk Shapley híressé vált megoldáskonceptiójával, a *Shapley-értékkel* [29], és áttekintjük annak tulajdonságait. Shapley azt vizsgálta, hogy egy adott játékban egy szereplő számára mi lesz az „értéke” annak, hogy csatlakozik a játékhoz. Azaz milyen „mérőszám” az, ami megadja egy játékos szerepének értékét a játékban. Bevezetjük a *megoldás* fogalmát, és rögzítünk néhány

természetesen adódó axiómát, amik már egyértelműen meghatározzák a Shapley-értéket.

Jelöljük \mathcal{G}^N -nel az N játékoshalmazzal rendelkező TU-játékok halmazát. *Megoldásnak* egy olyan $\psi : \mathcal{G}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ függvényt nevezünk, ami tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékhoz hozzárendeli a $\psi(v) = (\psi_i(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ vektort, azaz megadja egy játékos értékét egy tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékban.

Legyen $\pi : N \rightarrow \{1, \dots, n\}$ a játékosok egy sorbarendezése, Π_N pedig a játékosok összes lehetséges sorbarendezéseinek a halmaza.

4.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\psi : \mathcal{G}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ megoldás

- *hatékony (Pareto-optimális)*, ha $\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$,
 - *egyéniileg elfogadható*, ha $\psi_i(v) \geq v(\{i\})$ minden $i \in N$ -re,
 - *egyenlően kezelő*, ha $\forall i, j \in N, \forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ és $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ esetén $\psi_i(v) = \psi_j(v)$,
 - *sallangmentes*, ha $\psi_i(v) = v(\{i\})$, amennyiben $i \in N$ sallang játékos v -ben, vagyis $v(S \cup i) - v(S) = v(\{i\})$ minden $S \subseteq N \setminus i$ -re,
 - *additív*, ha $\psi(v + w) = \psi(v) + \psi(w)$ minden $v, w \in \mathcal{G}^N$ -re $((v + w)(S) := v(S) + w(S)$ értelmezéssel minden $S \subseteq N$ -re),
 - *homogén*, ha $\psi(\alpha v) = \alpha \psi(v)$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$ -re $((\alpha v)(S) := \alpha v(S)$ értelmezéssel minden $S \subseteq N$ esetén),
 - *kovariáns*, ha $\psi(\alpha v + \beta) = \alpha \psi(v) + \beta$ minden $\alpha > 0$ és $\beta \in \mathbb{R}^N$ esetén (ahol β a b vektor által generált additív játék),
- ahol a fenti feltételek minden $v, w \in \mathcal{G}^N$ -re fennállnak minden tulajdonság esetén.

A hatékonyság felel azért, hogy szétosztást kapjunk. Az egyéni elfogadhatóság természetes reprezentációja annak, hogy minden játékos legalább annyit „ér”, mint a belőle álló egyszemélyes koalíció. Az egyenlően kezelő tulajdonság azt fogalmazza meg, hogy egy játékos kifizetése csak a játékban betöltött szerepétől függ, olyan értelemben, hogy azonos szerepet betöltő játékosok azonos kifizetésben részesülnek. A sallangmentesség azt fejezi ki, hogy annak a játékosnak az értéke, aki bármelyik koalícióhoz csatlakozva az általa elérhetőnél se nagyobb, se kisebb értékváltozást nem idéz elő, annyi legyen, mint amennyi ezen konstans hozzájárulása. A kovariancia azért fontos, hogy egy esetleges skála módosítást az értékelés is „megfelelően” kövessen. Az additív, illetve homogén tulajdonságok már nem ennyire egyértelműen megkövetelhetők, együttes teljesülésük azonban a kovarianciánál jóval erősebb tulajdonságot eredményez.

Most pedig tekintsük Shapley [29] megoldásának definícióját:

4.2. *Definíció.* Tetszőleges (N, v) játékban az $i \in N$ játékos *Shapley-értéke* a

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{|S|!(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!} (v(S \cup i) - v(S))$$

szám, míg a játék *Shapley-megoldása*:

$$\phi(v) = (\varphi_i(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N.$$

4.1. *ÁLLÍTÁS.* A *Shapley-értékre* az alábbi tulajdonságok teljesülnek: *hatékony; szuperadditív (sőt 0-monoton) játékban egyénileg elfogadható; nem feltétlenül magbeli elosztás; egyenlően kezelő; sallangmentes; additív; homogén; és mivel sallangmentes, következésképpen kovariáns is.*

4.1. *TÉTEL.* (Shapley [29]) *Tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékban a $\phi(v)$ Shapley-megoldás az egyetlen hatékony, egyenlően kezelő, sallangmentes és additív $\mathcal{G}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ függvény.*

A Shapley-érték további axiomatizációs lehetőségeiről bővebben ld. Pintér [23], [24], [25], illetve [26] munkáit.

Általánosan is belátható (ld. például Solymosi [32]), hogy a Shapley-érték felírható a következő alakban:

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi_N} x_i^\pi(v),$$

ahol x^π jelöli a játékosok π sorrendjéhez tartozó határhozzájárulás-vektort. Így azt kapjuk, hogy a Shapley-érték a határhozzájárulás-vektorok egyenlően súlyozott átlaga.

4.1. *Megjegyzés.* Tetszőleges konvex játékban a mag mindig nemüres [31], és a Shapley-érték mindig egy magbeli elosztást ad.

5. A prenukleolusz és a nukleolusz

Egy tetszőleges játék maga általában vagy üres, vagy több elemből áll. Ez utóbbi esetben felmerül a kérdés, hogy a többféle mag elosztás közül hogyan válasszunk ki egyet, hiszen elvileg mindegyik egyéni, és koalíciós szinten is elfogadható megoldást ad. Két megoldást összehasonlítva előfordul, hogy egy adott koalíció az egyik elosztás szerint jobban jár, ők nyilván azt preferálnák. De ez lehet, hogy egy másik koalíciónak nem előnyösebb, stb. Kézenfekvő azt a megoldást választani, ahol a legrosszabbul járó koalíció is a lehető legjobban jár.

5.1. *Definíció.* Egy adott (N, v) játékban az S koalíciónak az x kifizetésnél vett *többlete* alatt az $e(S, x) = v(S) - x(S)$ különbséget értjük.

A többlet tehát azt mutatja meg, hogy egy adott koalíció mennyit nyerhet (vagy negatív nyereségek esetén mennyit veszíthet) azáltal, hogy a nagykoalícióban való részvételt és az x szétosztást visszautasítja. A szétosztások halmazán az üres, illetve a nagykoalíció többlete 0, így csak a valódi részkoalíciók vizsgálata lesz releváns, ezeket jelöljük \mathcal{N}_+ -szal. Egy tetszőleges (N, v) játék magja tehát így is felírható: $C(v) = \{x \in I^*(v) : \max_{S \in \mathcal{N}_+} e(S, x) \leq 0\}$. A szétosztások halmaza bármely játékban nemüres, a mag viszont csak akkor nemüres, ha a nagykoalíció értéke a többi koalícióhoz képest „elég nagy”.

Amennyiben több olyan szétosztásunk/elosztásunk is van, amiknél a legmagasabb többlet a lehető legalacsonyabb, akkor ezek közül stabilabbnak tartjuk azokat, amelyek esetén a második legnagyobb többlet is a lehető legalacsonyabb, és így tovább. Ez egy olyan optimalizálási sorozat, amelynek egyetlen kimenetele van, szétosztások esetén a prenukleolusz, elosztások esetén pedig a nukleolusz.

Rendezzük tehát az \mathcal{N}_+ -beli koalícióknak egy adott $x \in \mathbb{R}_N$ kifizetés esetén vett többleteit nemnövekvő sorrendbe:

$$E(x) = [\dots \geq e(S, x) \geq \dots : S \in \mathcal{N}_+].$$

Legyen $\rho(x)$ az $E(x)$ -ben előforduló többletszintek száma, $t^1(x)$ a legnagyobb többlet, $t^2(x)$ a második legnagyobb többlet, stb, egészen $t^\rho(x)$ -ig, ami a legalacsonyabb többlet, vagyis $t^1(x) > t^2(x) > \dots > t^\rho(x)$. A fenti jelölésekkel a prenukleolusz és a nukleolusz definíciója tehát:

5.2. Definíció. (Schmeidler [28]) Egy (N, v) játék $N^*(v)$ prenukleolusza / $N(v)$ nukleolusza a szétosztások / elosztások azon halmaza, amelyek a szétosztások / elosztások között lexikografikusan minimalizálják a nemnövekvő sorrendbe rendezett többletek vektorát, azaz

$$\begin{aligned} N^*(v) &= \{x \in I^*(v) : E(x) \leq_L E(y) \ \forall y \in I^*(v)\text{-re}\}, \\ N(v) &= \{x \in I(v) : E(x) \leq_L E(y) \ \forall y \in I(v)\text{-re}\}, \end{aligned}$$

ahol \leq_L jelöli a rögzített komponenssorrendű vektorok közötti gyenge lexikografikus rendezést (vagyis $A \leq_L B$ pontosan akkor, ha $A = B$, vagy $A_i < B_i$ az első olyan i komponensre, ahol az A és B vektorok különböznek).

Schmeidler [28] azt is megmutatta, hogy tetszőleges játék prenukleolusza egyetlen elemből áll, illetve, hogy bármely elosztással rendelkező játék nukleolusza egyetlen elosztásból áll.

6. Fixfa játékok

A fixfa játékok struktúrájukból adódóan számos gyakorlati alkalmazás modellezésében nyújtanak segítséget. Mint azt a fejezetben látni fogjuk, ezek a játékok speciális költségjátékok, ezért tudjuk, hogy mindig létezik mag elosztás, nukleolusz, a Shapley-érték pedig magbéli, ezért egy-egy elosztási problémának mindig lesz megoldása.

Ebben a részben tehát olyan szituációkkal foglalkozunk, amelyek gráfelméleti terminológiával élve rögzített fákkal modellezhetőek. Adott a résztvevők egy rögzített, véges halmaza, akik egy rögzített fával reprezentálható hálózaton keresztül kapcsolódnak egy kitüntetett csúcshoz, amit gyökérnek fogunk nevezni. Számos valós életbeli szituáció modellezhető így. Vegyük például azt az esetet, amikor egy öntözési csatornarendszer fenntartási költségeit vizsgáljuk. A csatornarendszer felhasználói a hálózat csúcsai, a hálózat élei az egyes csatornaszakaszokat, az élek súlyai pedig az adott szakasz fenntartási költségeit jelölik. A probléma reprezentálható egy kooperatív fixfa játékkal, ahol az egyes csoportok, koalíciók költségét az a minimális költség adja, ami a csoport tagjait a gyökérrel összekötő élekhez tartozik. A fixfa játékok modellje Megiddo [19] cikkéből ered, aki bebizonyította, hogy ezen játékok esetén a Shapley-érték és a nukleolusz kiszámítására létezik hatékony algoritmus, a nukleolusz $O(n^3)$, a Shapley-érték $O(n)$ idő alatt kiszámolható.

Speciális esetként meg kell említenünk a „repülőtér/kifutópálya problémák” osztályát (airport problems), melyek egy elágazásmentes fával, ún. láncsal modellezhetőek. Az ehhez kapcsolódó *repülőtér játékok* a sztenderd fixfa játékok egy valódi részalmazát adják. A repülőtér játékokat Littlechild és Owen [15] mutatták be az irodalomban, az osztállyal kapcsolatos eredmények egy összefoglalóját pedig Thomson [35] cikkében olvashatjuk.

Nézzük tehát pontosabban a fixfa játékokat. Granot és Maschler [11] olyan költségjátékokat vizsgáltak, melyek $\Gamma(V, E, b, c, N)$ fixfa hálózatokból erednek. Ebben a rendezett ötösben a (V, E) páros alkotja az irányított fát, V a csúcsok, E az élek halmaza. Az r csúcs szerepe a V -ben kitüntetett, ezt fogjuk gyökérnek (root) nevezni. (A fa lehet irányítatlan is, ha a modell úgy kívánja, a játék szempontjából nem lesz különbség.) Adott továbbá az élek halmazán egy $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény, ahol $c(e)$ jelöli az e élhez tartozó teljes (kiépítési, üzemeltetési stb) költséget. Hasonlóan adott a csúcsok halmazán is egy $b : V \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény. N a felhasználók, későbbiekben játékosok halmaza, minden $i \in N$ egy adott $v(i) \in V$ csúcshoz van hozzárendelve. Egy v csúcs akkor foglalt, ha legalább egy játékos hozzá van rendelve. N_T -vel a $T \subseteq V$ csúcsokhoz tartozó játékosokból álló koalíciót fogjuk jelölni. Szükségünk lesz továbbá egy (részben-) rendezésre a csúcsokon: két $i, j \in V$ csúcsra $i \leq j$, ha a gyökértől a j -hez vezető egyértelmű út áthalad i -n. $S_i(G)$ -vel pedig a $\{j \in V : i \leq j\}$ halmazt jelöljük, vagyis azon csúcsok halmazát, melyek i -ből irányított úton elérhetőek.

6.1. Definíció. Egy $\Gamma(V, E, b, c, N)$ fixfa hálózat akkor *stenderd*, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

- A c költségfüggvény nemnegatív számokat rendel az élekhez.
- A csúcsokhoz tartozó költségek nullák, azaz $b(v) = 0$ minden $v \in V$ esetén.
- A gyökérhez nincs hozzárendelve egyetlen játékos sem.

- Minden $v \in V$ levélhez (vagyis olyan csúcshoz, amiből további csúcs már nem érhető el) tartozik legalább egy játékos.
- Ha $v \in V$ -t nem birtokolja egyetlen játékos sem, akkor van legalább két csúcs, $v_1 \neq v_2$, amikre $(v, v_1), (v, v_2) \in E$.
- Pontosan egy olyan $v \in V$ létezik, amire $(r, v) \in E$.

A (V, E) gráfot a továbbiakban G -vel, a $\Gamma(V, E, b, c, N)$ sztenderd fixfa hálózatot pedig $\Gamma(G, c, N)$ -nel fogjuk jelölni. A játékosok célja, hogy a hálózaton keresztül össze legyenek kötve a gyökérrel. Tekintsünk a fenti példát, ahol gazdálkodók egy csoportja egy közös csatornarendszeren keresztül szeretné ellátni földterületeik öntözését. Ez a csatornahálózat egy ponton csatlakozik a főcsatornához, ahonnan a vízellátást fedezni tudják, ez lesz a gyökércsúcs. A felhasználók lesznek a gráf csúcsai, minden él a hálózatban a gyökértől kifelé, a felhasználók felé van irányítva. A felhasználóknak kell fedezniük a gyökértől a csúcsaikba irányuló út költségeit. Hasonlóképpen a felhasználók egy csoportja, koalíciója akkor van összekötve a gyökérrel, ha a koalíció minden egyes tagja elérhető a gyökérből irányított úton. Ekkor a csoport együttesen fedezi a részgráfon fellépő összköltséget. A kooperatív játékelmélet az ilyen típusú szituációkhoz az (N, v_c) kooperatív *költségjátékot* rendeli, amire a továbbiakban az egyszerűség kedvéért (N, c) rendezett párként fogunk hivatkozni.

A gráfban az $S \subseteq N$ koalíció tagjaihoz tartozó csúcsokat a gyökérrel összekötő egyértelmű utak unióját fa buroknak (vagy törzsnek) nevezzük, és \bar{S} -sal jelöljük. A következő állítás bizonyítása megtalálható Koster et al. [13] cikkében.

6.1. ÁLLÍTÁS. Egy $\Gamma(G, c, N)$ -hez tartozó sztenderd fixfa probléma esetén fennáll az alábbi egyenlőség: $c(S) = \sum_{v \in \bar{S}} c(e_v)$, minden $S \subseteq N$ esetén, ahol e_v azt az élt jelöli, ami a v csúcsot a gyökérrel összekötő úton a v -re, és az őt megelőző csúcsra illeszkedik.

A bizonyítás során az egyetértési játék duálisai adják a vonatkozó költségjáték reprezentációjának alapját. Ehhez tekintsük az alábbi két definíciót:

6.2. Definíció. Az N játékosalmazon minden $T \in 2^N \setminus \emptyset$, illetve $S \subseteq N$ esetén legyen

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } T \subseteq S \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az u_T játékot a T koalícióhoz tartozó *egyetértési játéknak* nevezzük.

6.3. Definíció. Az N játékosalmazon minden $T \in 2^N \setminus \emptyset$, illetve $S \subseteq N$ esetén legyen

$$\bar{u}_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } T \cap S \neq \emptyset \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az \bar{u}_T játékot a T koalícióhoz tartozó *egyetértési játék duálisának* nevezzük.

Megmutatható (Márkus et al. [17]), hogy az egyetértési játék duálisa meg-
egyezik egy megfelelő repülőtér játékkal. A fentiek segítségével a sztenderd fixfa
problémához tartozó költségjáték a következőképpen adható meg:

6.2. ÁLLÍTÁS. Legyen $\Gamma(G, c, N)$ egy sztenderd fixfa probléma, ekkor a vonat-
kozó (N, c) játék a következőképpen reprezentálható: $c = \sum_{v \in V \setminus \{r\}} c(e_v) \cdot \bar{u}_{S_v(G)}$,
ahol e_v azt az élt jelöli, ami a v csúcsot a gyökérrel összekötő úton a v -re és az őt
megelőző csúcsra illeszkedik, $S_v(G)$ pedig a v -ből irányított úton elérhető csúcsok
halmaza.

Sztenderd fixfa játékok esetén a *magról* a következő állításokat tudjuk (a bizo-
nyítások, illetve további reprezentációk megtalálhatók itt: Koster et al. [13]):

- Egy x elosztásvektor pontosan akkor magbeli, ha $x \geq 0$, és $x(\bar{S}) \leq c(\bar{S})$,
minden \bar{S} fa-burok esetén.
- Egy x elosztásvektor pontosan akkor magbeli, ha $x \geq 0$, és minden $e =$
 $(i, j) \in E$ élre:

$$\sum_{j \in V_e \setminus \{i\}} x_j \geq \sum_{e' \in E_e} c(e').$$

- Egy x elosztásvektor pontosan akkor magbeli, ha létezik y^1, \dots, y^n , ahol y^j
(minden $j \in 1, \dots, n$ -re) az $\mathbb{R}^{S_j(G)}$ egység-szimplex egy pontja, és

$$x_i = \sum_{j \in N(P_i(G))} y_i^j c(e_j), \quad \forall i \in N,$$

ahol $P_i(G)$ jelöli az irányított fában az i -t a gyökérrel összekötő úton lévő
csúcsok halmazát.

(Itt felhívnom a figyelmet arra, hogy mag sztenderd definíciójához képest a
költségjátékok esetén a definiáló relációk megfordulnak, mivel a mag eredetileg a
„minél nagyobb” kifizetésekről szól, ez pedig nemnegatív költségfüggvény esetén
„minél kisebb” költség megvalósulását jelenti.)

6.1. Megjegyzés. A 3. pont alapján egy-egy magbeli megoldás generálása egy-
szerű (ld. Koster et al. [13]).

6.2. *Megjegyzés.* Mivel a fixfa problémák speciális költségjátékokhoz vezetnek, így a 4.1. megjegyzés értelmében tudjuk, hogy a magjuk nemüres, illetve a Shapley-érték magbeli megoldást ad a vonatkozó elosztási problémára.

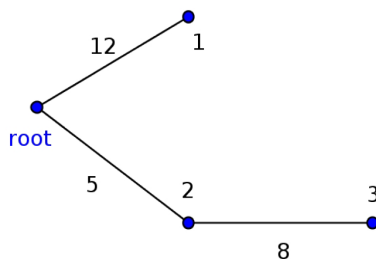
A *Shapley-érték* fixfa játékok esetén a következő, ún. soros elosztási szabály segítségével számolható (Littlechild és Owen [15]):

$$x_i = \sum_{j \in P_i(G) \setminus \{r\}} \frac{c(e_j)}{\#S_j(G)},$$

ahol $\#$ jelöli az adott halmaz elemszámát.

Ez olyan szempontból is fontos eredmény, hogy amíg egyes játékosztályok esetén a Shapley-érték meghatározása számítási szempontból bonyolult, addig ebben a speciális esetben, vagyis a fixfa játékok esetén a soros elosztás szabálya alapján könnyen kiszámolható.

6.1. *Példa.* Tekintsük szemléltetésképp az 1. ábra fixfa hálózatát:



1. ábra. Fixfa probléma hálózata.

A vonatkozó költségjátékot az alábbi táblázat adja meg:

S	\emptyset	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$v_c(S)$	0	12	5	13	17	25	13	25

Ekkor a játék Shapley-értéke: $\phi(v) = (12; 2, 5; 10, 5)$.

(Megjegyezném, hogy a példa egy nem sztenderd 3 fős fixfát ábrázol, mivel a gyökér nem egyetlen csúcshoz kapcsolódik. Ez a bemutatott algoritmusok tekintetében nem releváns, azonban a gyökér után egy senki által sem birtokolt plusz csúcs, illetve két 0 értékű él hozzávételével sztenderddé tehető, ha erre az alkalmazás miatt feltétlen szükség van.)

A *nukleolusz* kiszámolása esetén ugyanaz a probléma, mint a Shapley-értéknél, általánosságban bonyolult. Fixfa játékok esetén azonban a következő, ún. festőalgoritmussal könnyen számolható (ld. például Borm et al. [6] vagy Maschler et al.

[18]). Tegyük fel, hogy a fa csúcsai házak, az élek pedig utak, amik a házakat kötik be a közösségi házhoz, ami a gyökér. Az élek költsége azt mutatja, hogy egyetlen munkás (akit a tulajdonos felbérel) hány óra alatt tudja megfesteni az adott útszakaszon az út felfestéseit. A *háztól induló* festési megoldást a következő szabályok alapján kaphatjuk meg:

1. Minden munkás azonos sebességgel fest.
2. Minden munkás egészen addig dolgozik, amíg az otthonától a közösségi házig vezető úton nincs készen a felfestés.
3. Minden munkás egy, az otthona és a közösségi ház között vezető befejezetlen útszakaszon dolgozik.
4. Amennyiben egy szakasz a munkás, és a fában az őt megelőző lakó között nincs kész, a munkásnak azon a szakaszon kell dolgoznia.
5. Minden munkás a hozzá legközelebbi szakaszokon dolgozik az 1-4 pontok szerint.

A 6.1. példa esetén ez azt jelenti, hogy az 1-es játékos dolgozik az előtte lévő élen, míg a 2-es, 3-as a 2-es előtti élen, mindhárom fejenként 2,5 órát. Ezt követően a 2-es játékos végzett, az 1-es tovább fest még 9,5 órát a saját szakaszán, a 3-as pedig folytatja a munkát az előtte lévő élen 8 órán át. Így a játék nukleolusza $(12; 2,5; 10,5)$, ami ebben az esetben megegyezik a Shapley-értékkel.

A festőalgoritmust egy, a *közösségi háztól induló* megoldás szerint módosíthatjuk úgy, hogy a 4-es pontot elhagyjuk, az 5-öst pedig így módosítjuk: minden munkás a közösségi házhoz legközelebbi szakaszokon dolgozik az 1-3 pontok szerint. Ebben az esetben a módosítás eredményeképp éppen a Shapley-értéket kapjuk.

A fixfa játékok egyik általánosítása az ún. FMP-játékok (fixed tree games with multilocalized players), ahol egy-egy játékos több csúcsot is birtokolhat, így alternatív lehetőségei vannak a gyökércsúccsal való összeköttetésre. Ezekről a játékokról bővebben Hamers et al. [12] cikkében olvashatunk. A szerzők azt is megmutatják, hogy egy FMP-játék magja megegyezik a vonatkozó szubmoduláris sztenderd fixfa játék magjával.

Bjørndal et al. [5] cikkükben olyan sztenderd fixfa játékot vizsgáltak, ahol a játékosokhoz hozzá vannak rendelve bizonyos súlyok (pl. öntözési rendszer esetén a felhasznált vízmennyiség stb). A festőalgoritmus általánosításaként definiálják az ún. súlyozott festőalgoritmust, mindkét (háztól, illetve a közösségi háztól induló) irányban. Megmutatták, hogy az így kapott két megoldás az ún. súlyozott Shapley-értéket, illetve a nukleolusz egy általánosítását adja eredményül.

7. Alkalmazások

7.1. Fenntartási vagy öntözési játékok

A fixfa játékok egy elterjedt alkalmazási területe az ún. fenntartási játékok (maintenance games). Ezek olyan szituációkat írnak le, ahol játékosok, felhasználók egy csoportja egy fixfa hálózaton keresztül kapcsolódik egy bizonyos szolgáltatóhoz (ez a fa gyökércsúcsa). A hálózat minden élének adott a fenntartási költsége, a kérdés pedig az, hogy miként osszuk el „igazságosan” a teljes hálózat fenntartási költségét (ami az éleken vett költségek összege) a felhasználók között.

Egy kevésbé elterjedt elnevezés ugyanezen fixfa játékokra az ún. öntözési játékok (irrigation games), melyek egy konkrét vízgazdálkodási problémához kapcsolódnak. Gazdálkodók egy csoportja egy közös csatornarendszerből (hálózatból) fedezi a földjeik öntözését, amely egy kitüntetett ponton (gyöker-csúcs) csatlakozik a főcsatornához. Ennek a hálózatnak a költségeit szintén a gazdálkodók között kell elosztani. Aadland és Kolpin [1] 25 Montana állambeli csatornarendszert vizsgált, ahol az adott szituációkban két különböző típusú költségelosztási módszert alkalmaztak az ottani gazdálkodók. Az egyik az átlag szerinti elosztások, a másik a soros elosztások típusa. Az első esetén az összköltséget egyenlően osztották fel a gazdálkodók között. Érezzük azonban, hogy ez nem minden szempontból igazságos, például ha valaki a hálózat elején van, nem használja ugyanolyan mértékben a rendszert, mint valaki a hálózat legvégén. A soros elosztási elv szerint minden egyes csatornaszakasz költségét egyenlően kell szétosztani azon felhasználók között, akik az adott szakaszt használják. Egy-egy játékos pedig az általa használt csatornaszakaszok utáni szakaszonkénti költségek összegét fizeti. A soros elosztási elv rendelkezik az ún. szubvenciómentességi tulajdonsággal, ami azt jelenti, hogy ebben az elosztásban senki nem fizet többet, mint amennyit akkor kellene fizetnie, ha a hálózat csak belőle állna. Vagyis úgymond nem „támogatja” a tőle hátrébb elhelyezkedőket. Littlechild és Owen [15] azt is megmutatták, hogy a soros elosztási elv szerinti megoldás fixfa hálózatok esetén megegyezik a Shapley-értékkel.

Aadland és Kolpin [2] azt is vizsgálták, hogy mik azok a környezeti, geográfiai tényezők, amik esetleg egy-egy csatornarendszert az alkalmazott költségelosztási elv kiválasztásában befolyásoltak. A soros és átlag szerinti költségelosztások további tulajdonságait fixfák esetében pedig többek között Kovács és Radványi [14] vizsgálta.

7.2. Folyóelosztási, illetve folyótisztítási problémák

Bizonyos szempontból a fixfa játékok alá sorolhatóak a folyóelosztási, illetve a folyótisztítási problémák modellezésére szolgáló játékok is. Alapvetően egy speciális fixfa játékról van szó, ahol a fa egyetlen útból (lánc) áll. Adott egy folyó, és a folyó mentén elhelyezkedő játékosok, ezek lehetnek országok, városok, folyó menti vállalatok stb. A folyó menti elhelyezkedésük pedig definiál egy természetesen adódó sorrendet a játékosok között, a folyó sodrása mentén, $i < j$ jelenti,

hogy az i játékos a j -hez képest a folyó mentén feljebb helyezkedik el. Adott egy tökéletesen osztható jószág, a pénz, illetve a folyóból kinyerhető vízmennyiség, amit a játékosok egy hasznossági függvény szerint értékelnek. A folyóelosztási problémák esetén pl. nemzetközi viszonylatban elmondható, hogy egy-egy ország a saját folyószakaszán bizonyos szempontból teljhatalommal rendelkezik a folyó vize felett. Az alatta lévőknek nem mindegy, hogy milyen és mennyi vizet enged tovább az ország, ugyanakkor neki sem mindegy, hogy a felette lévő országok hogy rendelkeznek a folyóval az őt megelőző szakaszon. Nemzetközi egyezmények mentén lehet ezeket a kérdéseket szabályozni, ezek modellbe való beépítése már kilép a fixfa játékok eddig tárgyalt köréből. Ambec és Sprumont [4] cikkében a szereplők (országok) folyó menti elhelyezkedése határozza meg a vízmennyiséget, amit kontrollálnak, és a jólétet, amit ezáltal biztosítani tudnak maguknak. Ambec és Ehlers [3] azt vizsgálták, hogy miként lehet hatékonyan elosztani egy folyót a kapcsolódó országok között. Megmutatták, hogy az együttműködésből pozitív módon profitálnak az abban résztvevők, illetve megadták, hogy miként lehet a profitot elosztani.

A folyótisztítási problémák esetén hasonló a kiindulási struktúra. Adott a folyó, ennek mentén az országok (vállalatok, gyárak stb), illetve a szennyezés mértéke, amit az egyes szereplők kibocsájtanak. A folyó minden egyes szakaszán adottak a tisztítási költségek is, így a kérdés az lesz, hogy ezeket a tisztítási költségeket hogyan osszák fel egymás között. Mivel a folyó mentén feljebb elhelyezkedők szennyezése befolyásolja a szennyezettséget, és ezáltal a tisztítási költséget az utánuk lévő szakaszokon is, így egy egyetlen útból álló fixfa struktúrát kapunk. Ni és Wang [20] két különböző aspektusból vizsgálták a tisztítási költségek elosztásának kérdését. Nemzetközi szinten két doktrína létezik, az abszolút területi szuverenitás, illetve a határokon felüli területi integritás. Az első értelmében az adott országnak teljes szuverenitása van a területén belüli folyószakasz felett, a második szerint pedig egyetlen országnak sincs joga a természeti adottságok megváltoztatásához, a szomszédos országok kárára. Ezen két doktrína figyelembevételével azt vizsgálták, hogy milyen elosztási módszerek adottak a folyótisztítási költségek elosztásakor, és ezek milyen tulajdonságokkal rendelkeznek. Megmutatták, hogy mindkét esetben adott egy-egy elosztási módszer, amely a megfelelő kooperatív játékban megegyezik a Shapley-értékkel. Ebből kiindulva Gómez-Rúa [10] azt vizsgálta, hogy a tisztítási költség bizonyos környezeti adók figyelembevételével hogyan osztható szét. Mik azok az elvárt tulajdonságok, amelyeket valós szituációkban országok adózási stratégiájában előírnak, és ezek hogyan implementálhatóak a konkrét modellek esetén. Megvizsgálta, hogy adott elosztási stratégiák mely tulajdonságokkal karakterizálhatók, és megmutatta, hogy az egyik elosztási szabály megegyezik a vonatkozó játék súlyozott Shapley-értékével.

8. Összefoglalás

A cikkben a kooperatív játékelmélet alapfogalmainak bemutatásán túl definiáltuk a fixfa játékok osztályát. Ezen speciális játékosztály olyan gazdasági szituációk modellezésében nyújt segítséget, amelyek fa struktúrájú gráfokkal reprezentálhatók. Például egy csatornahálózat esetén a felhasználók egy fa struktúrájú hálózaton keresztül jutnak vízhez. Ennek a hálózatnak a kitüntetett pontja (a fa gyökere) a szolgáltató, a többi csúcsai pedig a felhasználók. A hálózat élei, illetve az azokon definiált költségek jelzik az egyes felhasználók hálózathoz való kapcsolódását, illetve a hálózat kiépítésének vagy a szolgáltatás igénybevételének költségét. Egy-egy ilyen hálózat működésekor felmerül az a természetes kérdés, hogy a fennálló költségeket hogyan osszák szét „igazságosan” az egyes szereplők között. Megmutattuk, hogy a problémához kapcsolódó fixfa játékok esetén mindig létezik olyan elosztás, ami egyéni és koalíciós szinten is elfogadható, speciálisan ez azt jelenti, hogy a vonatkozó játék maga mindig nemüres. Bemutattunk két elterjedt elosztási megoldást, a Shapley-értéket, illetve a nukleoluszt (ami mindig magbeli.) A Shapley-érték nem feltétlenül ad magbeli megoldást, viszont olyan tulajdonságokkal rendelkezik, amelyek sok esetben intuitív módon elvártak adott elosztási kérdés megoldása esetén. A nukleolusszal szemben pedig akkor is létezik, amikor az adott játékban a mag üres, vagyis ebben az esetben is bizonyos „igazságossági” feltételeknek eleget tevő megoldással tudunk szolgálni. A fixfa játékok esetén viszont a Shapley-érték is mindig magbeli, esetenként megegyezik a nukleolusszal. Számítási szempontból általában mindkét megoldás bonyolult, azonban a fixfa játékok osztályán mindkét esetben létezik olyan algoritmus, amellyel hatékonyan számolható. Az, hogy adott szituációban melyik megoldást érdemes választani, a konkrét problémától függ. Mindkét megoldásnak vannak olyan tulajdonságai, amelyek miatt bizonyos esetekben előnyösebbek, ezt a konkrét helyzetre vonatkozóan kell kiértékelni.

A cikk az elméleti alapok után az utolsó fejezetben olyan alkalmazási lehetőségeket mutat be, amelyek valós vízgazdálkodási problémákhoz köthetők. Az öntözéses gazdálkodás területéről származó probléma esetén egy csatornarendszer fenntartási és működési költségeit kell szétosztani, a folyótisztítási probléma esetén pedig a folyószennyezés kapcsán felmerülő tisztítási költségeket. Természetesen az alkalmazási lehetőségek köre ennél jóval szélesebb, számos olyan valós gazdasági (és nemcsak gazdasági) probléma létezik, ami hálózattal reprezentálható, és valamilyen elosztási (költség, bevétel, haszon stb.) kérdést vet fel. A cikk célja az volt, hogy a kooperatív játékelmélet segítségével egy olyan eszköztárat mutasson be, ami elősegíti a modellezést, és speciális elosztási problémák (fixfa struktúrák) esetében jól számolható megoldásokat szolgáltat.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetét fejezi ki a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal - NKFIH, 119930 pályázatának a támogatásért.

Hivatkozások

- [1] AADLAND, D. AND KOLPIN, V.: *Shared irrigation cost: An empirical and axiomatic analysis*, Mathematical Social Sciences, Vol. **35** No. **2**, pp. 203-218 (1998).
- [2] AADLAND, D. AND KOLPIN, V.: *Environmental determinants of cost sharing*, Journal of Economic Behavior & Organization, Vol. **53** No. **4**, pp. 495-511 (2004).
- [3] AMBEC, S. AND EHLERS, L.: *Sharing a River among Satiabile Agents*, Games and Economic Behavior, Vol. **64** No. **1**, pp. 35-50 (2008).
- [4] AMBEC, S. AND SPRUMONT, Y.: *Sharing a River*, Journal of Economic Theory, Vol. **107** No. **2**, pp. 453-462 (2002).
- [5] BJØRNDAL, E., KOSTER, M., AND TIJS, S.: *Weighted allocation rules for standard fixed tree games*, Mathematical Methods of Operations Research, Vol. **59** No. **2**, pp. 249-270 (2004).
- [6] BORM, P., HAMERS, H., AND HENDRICKX, R.: *Operations Research Games: A survey*, TOP, Vol. **9** No. **2**, pp. 139-199 (2001).
- [7] DRIESSEN, T. S. H.: *Cooperative Games, Solutions and applications*, Kluwer Academic Publisher (1988).
- [8] FRAGNELLI, V., GARCÍA-JURADO, I., AND MÉNDEZ-NAYA, L.: *On shortest path games*, Mathematical Methods of Operations Research, Vol. **52** No. **2**, pp. 251-264 (2000).
- [9] GILLIES, D. B.: *Solutions to general non-zero-sum games*, in Contributions to the Theory of Games, Vol. **IV**, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA (1959).
- [10] GÓMEZ-RÚA, M.: *Sharing a polluted river through environmental taxes*, SERIEs - Journal of the Spanish Economic Association, Vol. **4** No. **2**, pp. 137-153 (2013).
- [11] GRANOT, D., MASCHLER, M., OWEN, G., AND ZHU, W.: *The Kernel/Nucleolus of a Standard Tree Game*, International Journal of Game Theory, Vol. **25** No. **2**, pp. 219-244 (1996).
- [12] HAMERS, H., MIQUEL, S., NORDE, H., AND VAN VELZEN, B.: *Fixed tree games with multilocalized players*, Networks, Vol. **47** No. **2**, pp. 93-101 (2006).
- [13] KOSTER, M., MOLINA, E., SPRUMONT, Y., AND TIJS, S. H.: *Sharing the cost of a network: core and core allocations*, International Journal of Game Theory, Vol. **30** No. **4**, pp. 567-599, (2001).
- [14] KOVÁCS, G. ÉS RADVÁNYI, A.: *Költségelosztási modellek*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **28**, pp. 59-76 (2011).
- [15] LITTLECHILD, S. AND OWEN, G.: *A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case*, Management Science, Vol. **20** No. **3**, pp. 370-372 (1973).

- [16] LUCAS, W. F.: *Applications of cooperative games to equitable allocation*, in: Lucas (ed.), *Game Theory and its Applications*, pp. 19-36, RI. American Mathematical Society, Providence (1981).
- [17] MÁRKUS, J., PINTÉR, M., AND RADVÁNYI, A.: *The Shapley value for airport and irrigation games* (2011). URL <http://mpira.ub.uni-muenchen.de/30031/>
- [18] MASCHLER, M., POTTERS, J., AND REIJNIERSE, H.: *The nucleolus of a standard tree game revisited: a study of its monotonicity and computational properties*, International Journal of Game Theory, Vol. **39** No. **1-2**, pp. 89-104 (2010).
- [19] MEGIDDO, N.: *Computational Complexity of the Game Theory Approach to Cost Allocation for a Tree*, Mathematics of Operations Research, Vol. **3** No. **3**, pp. 189-196 (1978).
- [20] NI, D. AND WANG, Y.: *Sharing a Polluted River*, Games and Economic Behaviour, Vol. **60** No. **1**, pp. 176-186 (2007).
- [21] PARRACHINO, I., ZARA, S., AND PATRONE, F.: *Cooperative Game Theory and its Application to Natural, Environmental and Water Issues: 3. Application to Water Resources*, World Bank PolicyResearch Working Paper, Vol. **4074**, (2006).
- [22] PELEG, B. AND SUDHÖLTER, P.: *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, Kluwer (2003).
- [23] PINTÉR, M.: *Regressziós játékok*, Szigma, Vol. **XXXVIII** No. **3-4**, pp. 131-147 (2007).
- [24] PINTÉR, M.: *A Shapley-érték axiomatizálásai*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **26**, pp. 289-315 (2009).
- [25] PINTÉR, M.: *Regression games*, Annals of Operations Research, Vol. **186**, pp. 263-274 (2011).
- [26] PINTÉR, M.: *Young's axiomatization of the Shapley value - a new proof*, Annals of Operations Research, Vol. **235** No. **1**, pp. 665-673 (2015).
- [27] PINTÉR, M. AND RADVÁNYI, A.: *The Shapley value for shortest path games: a non-graph based approach*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **21** No. **4**, pp. 769-781 (2013).
- [28] SCHMEIDLER, D.: *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. **17** No. **6**, pp. 1163-1170 (1969).
- [29] SHAPLEY, L. S.: *A value for n-person games*, in: KUHN, H. W. AND TUCKER, A. W. (Hg.), *Contributions to the Theory of Games II*, Vol. **28** of *Annals of Mathematics Studies*, pp. 307-317, Princeton University Press, Princeton (1953).
- [30] SHAPLEY, LLOYD S.: *Markets as Cooperative Games*, Rand Corporation Paper, P-629, pp. 1-5 (1955).
- [31] SHAPLEY, L. S.: *Cores of Convex Games*, International Journal of Game Theory, Vol. **1**, pp. 11-26 (1971).
- [32] SOLYMOSI, T.: *Kooperatív játékok*, elektronikus jegyzet (2007). <http://gametheory.uni-corvinus.hu/Solymosi-KooperativJatekok-2007maj31.pdf>
- [33] STRAFFIN, P. D. AND HEANEY, J. P.: *Game Theory and the Tennessee Valley Authority*, International Journal of Game Theory, Vol. **10** No. **1**, pp. 35-43 (1981).

- [34] SUZUKI, M. AND NAKAYAMA, M.: *The Cost Assignment of the Cooperative Water Resource Development: A Game Theoretical Approach*, Management Science, Vol. **22** No. **10**, pp. 1081-1086 (1976).
- [35] THOMSON, W.: *Cost allocation and airport problems*, RCER Working Papers 537, University of Rochester - Center for Economic Research (RCER) (2007). URL <https://EconPapers.repec.org/RePEc:roc:rocher:537>
- [36] TIJS, S. H. AND DRIESSEN, T. S. H.: *Game theory and cost allocation problems*, Management Science, Vol. **32** No. **8**, pp. 1015-1028 (1986).
- [37] VON NEUMANN, J. AND MORGENSTERN, O.: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press (1944).
- [38] YOUNG, H. P.: *Cost allocation*, in: Young (ed.), *Fair Allocation*, Bd. 33 von *Proceedings Symposia in Applied Mathematics*, pp. 69-94, RI. American Mathematical Society, Providence (1985).
- [39] YOUNG, H. P., OKADA, N., AND HASHIMOTO, T.: *Cost allocation in water resources development*, Water Resources Research, Vol. **18** No. **3**, pp. 463-475 (1982).



Radványi Anna Ráhel Budapesten született 1984-ben. Az ELTE matematikus (MSc) szakán diplomázott 2010-ben, illetve a BCE alkalmazott közgazdász (BSc) szakán szintén 2010-ben. 2011-ben kezdte meg doktori tanulmányait a BCE Gazdaságinformatika Doktori Iskolájában, Deák István és Pintér Miklós témavezetése mellett. 2011-től 2015-ig az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének volt tudományos segédmunkatársa a Játékelméleti kutatócsoport tagjaként.

2007 óta oktat a BCE Matematika Tanszékén demonstrátorként, majd óraadóként, 2016 óta pedig egyetemi tanársegédként dolgozik ugyanitt. Óraadó volt a BMGE Számítástudo-

mányi és Információelméleti Tanszékén, illetve az ELTE Közgazdaságtudományi Tanszékén. 2008 és 2010 között tagja volt a FAKT Szakkollégiumnak, 2010-től a pedig a FAKT Alumninak. Tagja a Magyar Operációkutatási Társaságnak.

Kutatási területe a kooperatív játékelmélet, azon belül költségosztási problémák, illetve a Shapley-érték axiomatizációinak vizsgálata.

Két gyermek édesanyja.

RADVÁNYI ANNA RÁHEL

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar, Matematika Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 13-15., S207
anna.radvanyi@uni-corvinus.hu

STANDARD FIXED TREE GAME AND ITS APPLICATIONS TO WATER
MANAGEMENT PROBLEMS

ANNA RÁHEL RADVÁNYI

This paper aims to provide an introduction to the toolset of cooperative game theory through standard fixed tree games, a special game class. This increasingly popular area provides solution concepts for a wide range of practical applications, different economic cost allocation problems, among others. Standard fixed tree games represent a tree structure network where nodes of the network denote users using a service via the network. Our aim is to find "fair" allocations for the costs arising from using the system. After introducing the basic concepts and model we present water management applications based on real-world problems. We present one specific area of cooperative game theory, however, fixed trees provide an effective solution to more problems than those demonstrated through examples in this paper.

Keywords: cooperative game theory, fixed tree game, allocation, water management

Mathematics Subject Classification (2000): 91A10, 05C05, 60K35

ALKUHALMAZOK ÉS A MAG EGYBEESÉSE

SOLYMOSI TAMÁS

A kooperatív játékok legtöbbet vizsgált halmazértékű megoldása a mag, ami azt az alapvető stabilitási követelményt fogalmazza meg, hogy a nagykoalíció értékét mindegyik koalíció számára elfogadható módon kell szétosztani. Mivel sok játékban nem létezik ennyire stabil elosztás, olyan megoldási koncepciókra is szükség van, amelyek akkor sem üresek, amikor a mag üres. A szakirodalomban található számos magkiterjesztés közül itt csak az alkuhalmazok kerülnek terítékre, azok közül is csak a legismertebbek. A különféle alkuhalmazok közös jellemzője, hogy a magbelieken kívül olyan, a magon kívüli elosztásokat is megengednek, amelyeknél egy koalíció kiválását az ellenérdekelt játékosok meg tudják hiúsítani néhány kiválni szándékozó játékos kifizetésének megemelésével. A dolgozat bevezető jellegű áttekintést kíván nyújtani a klasszikus, a reaktív, a szemireaktív és a Mas-Colell-féle alkuhalmaz és a mag egybeesésére vonatkozó ismert eredményekről, kiegészítve néhány új észrevétellel.

1. Bevezetés

A *játékelmélet* tárgya a többszereplős interaktív döntési helyzetek matematikai modellezése és vizsgálata. A szereplők (játékosok) szuverén döntéshozók, akik a számukra adott cselekvési lehetőségek közül választással valamilyen mértékben befolyásolni tudják a döntési helyzet (játék) kimenetelét, s ezáltal nemcsak a saját magukra, hanem a többi résztvevőre vonatkozó következményeket is. Ez a szereplők között fennálló kölcsönös függőség szinte valamennyi gazdasági, társadalmi döntési helyzet alapvető jellemzője, ezért érthető, hogy az ilyen szituációk absztrakt vizsgálatának fő motiváló forrása, illetve alkalmazási területe a közgazdaság-tudomány, illetve tágabban a társadalomtudományok. A formalizált modellek elemzése ugyanakkor matematikai eszközökkel történik.

A játékelméletet szokás két fő, egymástól szigorúan el nem választható területre osztani. A legegyszerűbb, a két racionális döntéshozó közötti antagonisztikus konfliktust leíró nemkooperatív modell elemzése mellett a terület alapvetésének és névadójának számító könyvükben Neumann és Morgenstern [26] elsősorban a hatékonyságnövelés által motivált döntéshozók közötti együttműködés kérdéseit

vizsgálták. Egy játékot kooperatívnak tekintünk, követve a Nobel-díjas Harsányi János meghatározását [14], ha a játékosok közötti egyeztetések után a felek számára kötelező érvényű megállapodások (binding agreement) szület(het)nek. Ilyenkor a játék lefolyásának részleteit és az egyes játékosok stratégiai megfontolásait háttérbe szorítják az egyes koalíciók által elérhető kimenetek meghatározására, illetve az együttműködés hozadékának szétosztására vonatkozó kérdések.

A *kooperatív modellek* több alapkategóriába sorolhatók. Az első választóvonal az, hogy az adott szituációban létezik-e, vagy sem, egy olyan „pénzszerű termék” (side-payment) aminek átadásával az egyéni hasznosságok egymás között átruházhatók. Például a klasszikus párosítási modellekben a szereplőknek csak sorrendi preferenciáik vannak, mert a vizsgált helyzetek (felvételi, vesecseré) esetleg kimondottan tiltják a játékosok közötti bármiféle pénzbeli kompenzációt. Az átruházható hasznosságokat feltételező modellek tovább bonthatók aszerint, hogy az átadott „pénzszerű termék” minden résztvevő számára minden esetben azonos értéket jelent-e. Amennyiben az egyéni hasznosságskála-egységek azonosak, *átváltható hasznosságú* (transferable utility) kooperatív játékról beszélünk. Ilyenkor az egyéni hasznosságok összehasonlíthatók, sőt összeadhatók, így értelmezhető az egyes koalíciók „értéke” is. Neumann és Morgenstern [26] óta az átváltható hasznosságú kooperatív alapmodellben egy koalíció értékének a tagjai által (a koalícióban részt nem vevő játékosok döntéseitől függetlenül) elérhető legnagyobb összhasznosságot szokás tekinteni. A központi kérdés pedig a koalíció által elért összhaszonnak a tagok közötti újraelosztása.

Itt csak átváltható hasznosságú kooperatív játékok megoldásaival foglalkozunk, ezért a továbbiakban (kooperatív) játék alatt mindig ilyen játékot értünk. A címben jelzett halmazértékű megoldások egybeesésének körülményeit vizsgáljuk. A mag (core), illetve a különféle alkuhalmazok (bargaining sets) mindegyike valamilyen stabilitási követelményt testesít meg. Amikor tehát ezen megoldások kapcsolatát vizsgáljuk, tulajdonképpen a mögöttes stabilitási tulajdonságok viszonyát elemezzük.

2. Alapok

Egy *kooperatív játék* alatt az (N, v) párt értjük, ahol N a játékosok véges, nemüres halmaza, és $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ a koalíciós függvény, ami mindegyik $S \subseteq N$ koalícióra megadja annak $v(S)$ értékét (a tagjai együttműködése által elérhető maximális összhasznosságot). Definíció szerint $v(\emptyset) = 0$. Az (N, v) játék *szuperadditív*, ha tetszőleges $S \cap T = \emptyset$ koalíciókra $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ teljesül, és *gyengén szuperadditív*, ha az egyenlőtlenséget csak egyelemű T -vel követeljük meg. A szuperadditív játékok az olyan kooperatív helyzetek modelljei, ahol a közös tagot nem tartalmazó koalíciók együttműködése csak előnnyel járhat. Amennyiben ez a „pozitív szinergia” csak a nagykoalíciót eredményező együttműködéseknel jön biz-

tosan létre, azaz ha tetszőleges $N = N_1 \cup \dots \cup N_k$ partícióra

$$v(N_1) + \dots + v(N_k) \leq v(N)$$

teljesül, a játékot *kohézív*nek hívjuk. Amikor ezt a kohéziós egyenlőtlenséget a nagykoalíciónak csak az olyan partícióitól várjuk el, amelyekben legfeljebb egy koalíció nem egyelemű, azaz ha tetszőleges $S \subseteq N$ -re $v(S) + \sum_{j \in N \setminus S} v(j) \leq v(N)$ teljesül, a játékot *gyengén kohézív*nek mondjuk. Egy szuperadditív játék nyilván kohézív is, egy gyengén szuperadditív játék pedig gyengén kohézív is.

Az (N, v) játék egy *megoldásán* a játékosok egyéni részesedését tartalmazó $x = (x_i : i \in N) \in \mathbb{R}^N$ kifizetés-vektort értjük, amire azt mondjuk, hogy

- *szétosztás*, ha $x(N) = v(N)$;
- *elosztás*, ha szétosztás, és $x_i \geq v(i)$ minden $i \in N$ -re;
- *mag-elosztás*, ha szétosztás, és $x(S) \geq v(S)$ minden $S \subset N$ -re,

ahol $x(S) := \sum_{i \in S} x_i$ jelöli az $S \subseteq N$ koalíció összkifizetését. Azt mondjuk, hogy az y kifizetésvektor az S koalíció által *dominálja* az x kifizetés-vektort, ha $y(S) \leq v(S)$, és $y_i > x_i$ minden $i \in S$ -re. Nyilvánvaló, hogy az x csak akkor dominálható az S -en keresztül, ha az $e_x(S) = v(S) - x(S)$ *többlet* pozitív, és minél nagyobb ez a többlet, az S annál „elégedetlenebb” az x megoldással.

Vizsgálatainkban szinte kizárólag elosztásokra szorítkozunk, halmazukat Im jelöli (imputations). Könnyen adódik, hogy tetszőleges (N, v) játékra,

$$\text{Im}(v) \neq \emptyset \iff v(N) \geq \sum_{i \in N} v(i). \quad (1)$$

Szuperadditív (gyengén szuperadditív / kohézív / gyengén kohézív) játékokban ez az egyenlőtlenség nyilván teljesül, az elosztások halmaza ilyenkor tehát nem üres.

2.1. A mag

A mag elosztások halmaza a *mag*, jelölése Co (core). Belátható, hogy szuperadditív (gyengén szuperadditív / kohézív / gyengén kohézív) játékokban a mag azonos a semmilyen elosztás által sem dominált elosztások halmazával. Nyilván minden játékban $\text{Co} \subseteq \text{Im}$. A mag nemüressége is eldönthető az (1)-ben szereplőhöz hasonló lineáris egyenlőtlenségek ellenőrzésével, de ehhez sokkal több és jóval összetettebb egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. A részletek tárgyalása nélkül azt mondjuk, hogy egy játék *kiegyensúlyozott*, ha a magja nem üres, és *teljesen kiegyensúlyozott*, ha bármelyik koalícióhoz tartozó részjátéka is kiegyensúlyozott. Rögtön adódik, hogy minden teljesen kiegyensúlyozott játék szuperadditív, és minden kiegyensúlyozott játék kohézív.

Kétszemélyes játékokban $\text{Co} = \text{Im}$, hiszen a nagykoalíción kívül csak egy-személyes koalíciók vannak, az elosztások és a mag elosztások tehát ugyanazok.

Az (1) alatti jellemzés tükrében kapjuk, hogy a (gyengén) kohézív / szuperadditív esetben $\text{Co} = \text{Im} \neq \emptyset$, egyébként viszont $\text{Co} = \text{Im} = \emptyset$.

A legalább háromszemélyes játékok halmazán a szuperadditivitás se nem szükséges, se nem elégséges feltétele a kiegyensúlyozottnak. Ismeretes például, hogy egy *háromszemélyes szuperadditív játékban* (sőt gyengén szuperadditív / kohézív / gyengén kohézív játékban is)

$$\text{Co}(v) \neq \emptyset \iff \frac{v(ij) + v(ik) + v(jk)}{2} \leq v(ijk). \quad (2)$$

Másrészt nyilván kiegyensúlyozott (tehát (gyengén) kohézív), de nem (gyengén) szuperadditív az a háromszereplős játék, amelyben minden koalíció értéke 0, kivéve egy kétszemélyes koalíciót, aminek viszont negatív az értéke.

A mag a kooperatív játékok legtöbbet vizsgált halmazértékű megoldása. Azt a nagyon intuitív stabilitási követelményt fogalmazza meg, hogy a játék megoldásának olyan módon kell a nagykoalíció értékét szétosztania, ami mindegyik koalíció számára elfogadható, másképpen, ami egyetlen koalíción keresztül sem dominálható. Mivel sok játékban nem létezik ennyire stabil elosztás, szükség van olyan megoldási koncepciókra is, amelyek akkor sem üresek, amikor a mag üres. A Neumann és Morgenstern [26] által leginkább vizsgált ún. konstans összegű játékokban például a mag csak a kooperáció szempontjából érdektelen (additív) esetben nem üres, ezért ők a stabil halmazokat tekintették a modell megoldásának. Az irodalomban fellelhető számtalan egyéb magkiterjesztés közül mi itt csak az egyik legelsőt, az Aumann és Maschler [2] által javasolt alkuhalmazokat tárgyaljuk.

2.2. A klasszikus alkuhalmaz

Az alkuhalmazok közös jellemzője, hogy olyan dominált (magon kívüli) elosztásokat is megengednek, amelyeknél egy koalíció kiválási szándékát az ellenérdekelte játékosok meg tudják hiúsítani néhány kiválni szándékozó játékos kifizetésének megemelésével. A mögöttes alkufolyamat részletei, s így az azt túlélő elosztáshalmazok is nagyon sokfélék lehetnek. Az Aumann és Maschler [2] által felvetett számos változat közül az a típus került a vizsgálatok fókuszába, amelyről Davis és Maschler [5], [6] bebizonyították, hogy amennyiben a játékban vannak elosztások, ez az alkuhalmaz nem üres. Írásunkban, az utolsó fejezetig, alkuhalmaz alatt mi is ezt a „klasszikus” alkuhalmazt értjük.

Legyen (N, v) egy nemüres elosztáshalmazzal rendelkező játék (lásd (1)). Azt mondjuk, hogy az $x \in \text{Im}$ elosztásnál az (S, y) pár az i játékosnak a j ($\neq i$) játékkal szembeni *kontrája* (objection), ha

$$S \subset N, \quad i \in S \not\subset j, \quad y \in \mathbb{R}^S, \quad y(S) = v(S), \quad y_k > x_k \quad \forall k \in S\text{-re.}$$

Az i játékos j -vel szembeni (S, y) kontrájára a j játékos *rekontrája* (counter-objection) a (T, z) pár, ha

$$T \subset N, \quad j \in T \not\equiv i, \quad z \in \mathbb{R}^T, \quad z(T) = v(T), \\ z_k \geq y_k \quad \forall k \in T \cap S\text{-re}, \quad z_k \geq x_k \quad \forall k \in T \setminus S\text{-re}.$$

Az *alkuhalmaz*, jelölje M , a játék azon elosztásainak halmaza, amelyeknél minden kontrára van rekontra. Másképpen, azok az elosztások nem tartoznak az alkuhalmazba, amelyeknél van *megalapozott kontra* (justified objection), azaz egy „támadó” játékosnak egy olyan kontrája, amire a „védekező” játékosnak nincsen rekontrája.

A továbbiakban szükségünk lesz a következő, könnyen belátható észrevételekre.

2.1. ÁLLÍTÁS. Tetszőleges gyengén kohézív játékban egy elosztásnál:

1. Egy koalíció csak akkor szerepelhet egy kontrában, ha a többlete pozitív. Következésképpen, a nagykoalíción és az egyszemélyes koalíciókon keresztül nem lehet kontrázni.
2. Egy koalíció csak akkor szerepelhet egy rekontrában, ha a többlete nemnegatív, és amennyiben van közös tagja a kontrában szereplő koalícióval, akkor a többlete pozitív. Következésképpen, egy játékos a saját egyszemélyes koalícióján keresztül csak akkor tud rekontrázni, ha a többlete nulla.
3. Az $i \in N$ játékosnak a $j \in N$ játékossal szemben csak egy olyan koalíción keresztül lehet megalapozott kontrája, amelynek a (pozitív) többlete szigorúan több, mint bármelyik az i -t nem, de a j -t tartalmazó koalíció többlete.

Davis és Maschler [6] bizonyították, hogy az M alkuhalmaz nem üres, ha a játékban az elosztások Im halmaza nem üres. Mivel pontosan azok az elosztások a magbeliek, amelyeknél egyetlen játékosnak sincs kontrája, tehát megalapozott kontrája sem lehet, adódik, hogy

– bármilyen játékban $\text{Co} \subseteq M \subseteq \text{Im}$.

Kétszemélyes játékokban, mint láttuk, $\text{Co} = \text{Im}$, következésképpen,

$$\text{Co} = M = \text{Im},$$

mégpedig a szuperadditív (vagy ami ilyenkor ugyanaz, gyengén szuperadditív / kohézív / gyengén kohézív) esetben $\text{Co} = M = \text{Im} \neq \emptyset$, egyébként viszont $\text{Co} = M = \text{Im} = \emptyset$.

Az alkuhalmaz még a *háromszemélyes játékokban* is könnyen meghatározható, legalábbis a nagyon enyhe feltételt jelentő gyengén kohézív esetben.

2.2. ÁLLÍTÁS. Legyen $(N = \{i, j, k\}, v)$ egy háromszereplős játék.

1. Ha v kiegyensúlyozott (tehát gyengén kohézív is), akkor $\text{Co}(v) = M(v)$.
2. Ha v nem kiegyensúlyozott, de gyengén kohézív, akkor $M(v)$ azt az egyetlen x elosztást tartalmazza, amelyre $e_x(ij) = e_x(ik) = e_x(jk)$.
3. Ha v egy nemüres elosztáshalmazzal rendelkező, de nem gyengén kohézív játék, akkor $M(v)$ egy (esetleg egyetlen pontból álló) egyenes szakasz.

Bizonyítás. Terjedelmi okokból csak az első két állítást bizonyítjuk. A nem gyengén kohézív esettel kapcsolatban Tchantcho, Moyouwou és Andjiga [41] cikkére utalunk, akik megadták tetszőleges háromszereplős játékra az alkuhalmaz (ami a kiegyensúlyozott esetben a mag) pontos szerkezetét. Az alkalmazásokban csak kivételesen előforduló nem gyengén kohézív esetet a 2.2. példával szemléltetjük.

Legyen v egy tetszőleges gyengén kohézív játék (tehát nemüres elosztáshalmazzal rendelkező) háromszereplős játék, és legyen $x \in \text{Im} \setminus \text{Co}$ egy tetszőleges, magon kívüli elosztás (ha a mag üres, akkor persze ez a kitétel semmis). Címkezzük úgy a három játékost, hogy $e_x(ij) \geq e_x(ik) \geq e_x(jk)$ legyen. Mivel $e_x(ij) > 0$, ezen a maximális (pozitív) többletű koalíción keresztül az i és a j is kontrázhathatja a komplementerbeli k játékost. Mivel v gyengén kohézív, $v(ijk) \geq v(ij) + v(k)$, amiből $0 = e_x(ijk) \geq e_x(ij) + e_x(k)$, innen pedig $e_x(k) < 0$ következik. Tehát a k játékos a saját egyszemélyes koalícióján keresztül nem tud rekontrázni, csak a kontrázó ij koalícióval átfedő ik , illetve jk koalíciókon keresztül, de ezekkel is csak akkor, ha pozitív a többletük (2.1. állítás 2. pont).

Amennyiben $e_x(ij) > e_x(jk) > 0$, az i játékos megalapozottan tudja kontrázni k -t az $S = ij$ koalíción keresztül az $y_i = x_i + \frac{e_x(ij) - e_x(jk)}{2}$ és $y_j = x_j + \frac{e_x(ij) + e_x(jk)}{2}$ kifizetésekkel. A k játékos ezzel szemben ugyanis csak a $T = jk$ koalíción keresztül tudna védekezni, de egy rekontrához kettőjüknek összesen legalább $y_j + x_k = x_j + \frac{e_x(ij) + e_x(jk)}{2} + x_k > x(jk) + e_x(jk) = v(jk)$ kifizetés kellene, ami viszont elérhetetlen a jk koalíció számára. Magon kívüli elosztás (akár üres a mag, akár nem) tehát csak akkor lehet az alkuhalmaz eleme, ha $e_x(ij) = e_x(ik) = e_x(jk) > 0$.

Ha a v kiegyensúlyozott, akkor $v(ijk) \geq \frac{v(ij) + v(ik) + v(jk)}{2}$, amiből $0 = e_x(ijk) \geq \frac{e_x(ij) + e_x(ik) + e_x(jk)}{2}$ következik tetszőleges x elosztásra. Az előbbi megállapítás tükrében ez azt jelenti, hogy magon kívüli elosztás nem tartozhat az alkuhalmazba, hiszen $x \in M \setminus \text{Co}$ esetén a számlálóban szereplő mindhárom többlet pozitív lenne. Következésképpen, ha a mag nemüres, akkor $\text{Co}(v) = M(v)$. Ezzel az állítás 1. pontját beláttuk.

Ha a v nem kiegyensúlyozott, akkor minden elosztás magon kívüli, tehát mindegyik kétszemélyes koalíció többlete pozitív. Ezek közül, mint megállapítottuk, csak azok az elosztások tartozhatnak az alkuhalmazba, amelyeknél a kétszemélyes

koalíciók többsége azonos. A $v(ij) - x_i - x_j = v(ik) - x_i - x_k = v(jk) - x_j - x_k$ lineáris egyenletrendszernek viszont egyetlen megoldása van, mégpedig

$$x_i = \frac{v(ijk) + v(ij) + v(ik) - 2v(jk)}{3},$$

és a megfelelő módon permutált változatok a másik két játékosra. Az alkuhalmaz tehát ebből az egyetlen elosztásból áll. Ezzel az állítás 2. pontját is beláttuk. \square

A fenti második állítás szemléltetésére nézzük a következő példát.

2.1. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$, a koalíciós függvény pedig

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	30	30	30	30

A játék szuperadditív, de nem kiegyensúlyozott, mag elosztás csak $v(123) \geq 45$ esetén létezne (lásd (2)). Az alkuhalmaz viszont $M = \{(10; 10; 10)\}$, ugyanis csak ennél az elosztásnál nincsen megalapozott kontra. Egyrészt a $(10; 10; 10)$ elosztásnál egy i -nek egy k -val szembeni kontrája csak

$$(S = ij; y_i = 10 + \alpha, y_j = 20 - \alpha)$$

alakú lehet, ahol $0 < \alpha < 10$, erre viszont tud válaszolni k , például a

$$(T = jk; z_j = 20, z_k = 10)$$

rekontrával. Másrészt, ha az x elosztásban van két különböző kifizetés, mondjuk $x_i \leq x_j \leq x_k$, de $x_i < x_k$, akkor nyilván $x_i < 10 < x_k$, és $x_j \leq 15$, vagyis az $(S = ij; y_i = 10, y_j = 20)$ az i -nek egy olyan kontrája a k -val szemben, amire k -nak nincsen rekontrája, sem egyéni (az x elosztás), sem a $T = jk$ -n keresztül, ahhoz ugyanis legalább $z_j + z_k \geq 20 + x_k > 30 = v(jk)$ kifizetés kellene, ami kettőjük számára elérhetetlen.

A 2.1. állítás 3. pontja szerint egy nem gyengén kohézív, háromszereplős játékban az alkuhalmaz lehet egy szakasz is. Ennek az esetnek a szemléltetésére nézzük a következő példát.

2.2. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$, a koalíciós függvény pedig

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	4	1	1	3

A játék nem gyengén kohézív, hiszen $v(12) + v(3) > v(123)$, a mag tehát üres. Az alkuhalmaz mégis több pontból áll, $M = \{x^\alpha = (x_1 = 2 - \alpha; x_2 = 1 + \alpha; x_3 = 0) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

Egyrészt, az x^α elosztásoknál a koalíciónkénti összkifizetések, illetve többletek az alábbiak:

S	1	2	3	12	13	23	123
$x^\alpha(S)$	$2 - \alpha$	$1 + \alpha$	0	3	$2 - \alpha$	$1 + \alpha$	3
$e_{x^\alpha}(S)$	$-2 + \alpha$	$-1 - \alpha$	0	1	$-1 + \alpha$	$-\alpha$	0

Mivel akármelyik x^α ($0 \leq \alpha \leq 1$) elosztásnál csak az $S = 12$ koalíció többlete pozitív, csak $1 \rightarrow 3$ és $2 \rightarrow 3$ kontrák keletkezhetnek, de ezeket a 3-as játékos egyedül is képes rekonstrálni a ($T = 3; z_3 = 0$) párral.

Másrészt, bármelyik x^α ($-1 \leq \alpha < 0$) elosztásnál a 2-es játékos kontrázhatja az 1-est az ($S = 23; y_2 = 1 + \frac{\alpha}{2}; y_3 = 0 - \frac{\alpha}{2}$) párral, amire viszont nincs az 1-esnek rekontrája, sem önállóan, sem a $T = 13$ koalíción keresztül, ahhoz ugyanis legalább $z_1 + z_3 \geq 2 - \frac{3\alpha}{2} > 1 = v(13)$ kifizetés kellene, ami kettőjük számára elérhetetlen. Hasonlóképpen, bármelyik x^α ($0 < \alpha \leq 1$) elosztásnál az 1-es játékosnak van megalapozott kontrája a 2-szel szemben. Végül, minden olyan x elosztásnál, amiben $x_3 > 0$, a 3-as játékos önállóan nem képes rekontrára, tehát az

$$(S = 12; y_1 = x_1 + \frac{x_3}{2}; y_2 = x_2 + \frac{x_3}{2})$$

egy megalapozott kontra a 3-assal szemben (például az 1-esé).

3. Az alkuhalmaz és a mag egybeesése

Mivel bármilyen játékban a mag (akár üres, akár nem) részhalmaza az alkuhalmaznak, az elosztásokkal (tehát nemüres alkuhalmazzal is) rendelkező játékokban a $\text{Co} = M$ egyenlőséghez elengedhetetlen a játék kiegyensúlyozottsága. Ugyanakkor Maschler [20] ötszereplős, teljesen kiegyensúlyozott példája is mutatja, hogy a magelosztások létezése messze nem zárja ki az alkuhalmaz értelmében stabil elosztások létezését. Ismertek ugyanakkor olyan speciális játékosztályok, ahol az alkuhalmaz nem bővebb, mint a nemüres mag. Ilyen például a konvex játékok osztálya (Maschler et al. [22]), a vétó játékokkal rendelkező (vagyis a kiegyensúlyozott) monoton egyszerű játékok osztálya (Einy, Wettstein [7]), a szuperadditív egyszerű folyamjátékok osztálya (Reijnierse et al. [32]), vagy az alkalmazásokban ugyancsak gyakran előforduló faösszefüggő additív játékok osztálya (Potters, Reijnierse [31]). Az ezekre az egybeesési eredményekre adott bizonyítások egységes keretbe helyezhetők és általánosíthatók az alábbi fogalom segítségével.

Kiindulva az (N, v) játékból, definiáljuk az $x \in \mathbb{R}^N$ -hez tartozó (N, w_x) *maximális többlet játékot* a

$$w_x(S) := \max_{T \subseteq S} e_x(T) \quad \text{minden } S \subseteq N\text{-re}$$

koalíciós függvénnyel. Nyilván $w_x(\emptyset) = 0$, tehát w_x valóban egy játék.

Könnyen adódnak a következő észrevételek.

3.1. ÁLLÍTÁS. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}^N$ -re

1. w_x monoton (azaz $w_x(S) \leq w_x(T)$ minden $S \subseteq T$ -re);
2. $w_x(S) \geq \max\{e_x(S), 0\}$ minden $S \subseteq N$ -re;
3. w_x a minimális olyan monoton koalíciós függvény, ami teljesíti az előző pontbeli tulajdonságot (a w_x az e_x többlet játék monoton fedőjátéka);
4. $x \in \text{Im} \iff w_x$ 0-normalizált (azaz $w_x(i) = 0$ minden $i \in N$ -re);
5. $x \in \text{Co} \iff w_x$ a nulla-játék (azaz $w_x(S) = 0$ minden $S \subseteq N$ -re);
6. ha a v játék szuperadditív / gyengén szuperadditív, akkor az e_x többlet játék, illetve a w_x maximális többlet játék is szuperadditív / gyengén szuperadditív.
7. ha a v játék konvex (azaz $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ minden $S, T \subseteq N$ -re), akkor az e_x többlet játék, illetve a w_x maximális többlet játék is konvex.

A fentiekből következik, hogy amennyiben $x \in \text{Im}$, a w_x maximális többlet játék tetszőleges játék esetén gyengén szuperadditív, hiszen az 1. pont szerint mindig monoton és a 4. pont szerint elosztásnál 0-normalizált is.

A maximális többlet játék jól használható a megalapozott kontrak létezésének eldöntésére. Az S koalíció ugyanis nyilván csak akkor szerepelhet egy kontrakban az x elosztásnál, ha $e_x(S) > 0$, és annál nehezebb erre rekonstruálni, minél magasabb ez a többlet (lásd az 2.1. állítás 3. pontját).

3.1. TÉTEL. (Solymosi [35])

Legyen v egy szuperadditív játék és $x \in \text{Im}(v) \setminus \text{Co}(v)$ egy magon kívüli elosztás. Ha a w_x maximális többlet játék kiegyensúlyozott, akkor az x elosztásnál van megalapozott kontra, tehát $x \notin M(v)$.

Bizonyítás. Legyen v egy szuperadditív játék, és $x \in \text{Im}(v) \setminus \text{Co}(v)$ egy olyan magon kívüli elosztás, amelynél a w_x kiegyensúlyozott. Vegyünk egy $u \in \text{Co}(w_x)$ vektort. Mivel $u \geq 0$ (hiszen w_x 0-normalizált), és $u(N) = w_x(N) > 0$, az u pozitív komponenseinek $P := \{i \in N : u_i > 0\}$ halmaza nem üres.

Legyen $S \subset N$ egy tartalmazásra nézve maximális olyan koalíció, amire $e_x(S) = w_x(N)$. Nyilván $\emptyset \neq S \neq N$. Továbbá $P \subseteq S$, és $e_x(S) = u(S)$, hiszen

$$e_x(S) \leq w_x(S) \leq u(S) \leq u(S) + u(N \setminus S) = u(N) = w_x(N) = e_x(S)$$

miatt $u_j = 0$ minden $j \in N \setminus S$ játékosra.

Legyen $i \in P \subseteq S$, és $j \in N \setminus S$. Definiáljuk az $y \in \mathbb{R}^S$ vektort a következőképpen:

$$y_i := x_i + \frac{u_i}{|S|}, \text{ és } y_k := x_k + u_k + \frac{u_i}{|S|}, \text{ ha } k \neq i, k \in S.$$

Mivel $u_i > 0$, és $u_k \geq 0$ minden $k \in S$ -re, $y_k > x_k$ minden $k \in S$ játékosra. Mivel $y(S) = x(S) + u(S) = x(S) + e_x(S) = v(S)$, az (S, y) konfiguráció az i egy kontrája a j -vel szemben az x -nél. Sőt, egy megalapozott kontrája.

A j játékosnak ugyanis nincs rekontrája az (S, y) kontrára. Egyrészt, mivel az S tartalmazásra nézve maximális, és az e_x szuperadditív (3.1. állítás 6. pont), bármely $T \neq \emptyset$ és $T \cap S = \emptyset$ koalíció többlete negatív, hiszen

$$e_x(S) > e_x(S \cup T) \geq e_x(S) + e_x(T).$$

Vagyis az S -től diszjunkt koalícióval a j nem tud rekontrázni (2.1. állítás 2. pont). Másrészt, vegyünk egy olyan $T \cap S \neq \emptyset$ koalíciót, amire $j \in T \not\subseteq i$, és egy $z \in \mathbb{R}^T$ vektort. A (T, z) akkor lenne egy rekontra az (S, y) kontrára, ha

$$\begin{aligned} z(T) &\geq x(T \setminus S) + y(T \cap S), \\ &= x(T \setminus S) + x(T \cap S) + u(T \cap S) + \frac{|T \cap S|}{|S|} u_i, \\ &> x(T) + u(T), \text{ mivel } u(T \setminus S) = 0, u_i > 0, \\ &\geq x(T) + e_x(T), \text{ mivel } u(T) \geq w_x(T) \geq e_x(T), \\ &= v(T) \geq z(T) \end{aligned}$$

teljesülne, de ez lehetetlen. Következésképpen, az (S, y) egy megalapozott kontra az x -nél, tehát $x \notin M(v)$. \square

Mielőtt rátérnénk a tétel alkalmazhatóságának szemléltetésére, pár fontos megjegyzést teszünk.

3.1. Megjegyzés. A maximális többlet játék kiegyensúlyozottsága csak elégséges, de nem szükséges feltétele annak, hogy az adott elosztásnál legyen megalapozott kontra.

Vegyük például a 2.1. példabeli háromszereplős szuperadditív (de nem kiegyensúlyozott) játékot és az $x = (12; 9; 9)$ elosztást. Itt a koalíciónkénti összkifizetések, a többletek, illetve a maximális többletek az alábbiak:

S	1	2	3	12	13	23	123
$x(S)$	12	9	9	21	21	18	30
$e_x(S)$	-12	-9	-9	9	9	12	0
$w_x(S)$	0	0	0	9	9	12	12

Az x elosztásnál például a 3-as kontrázhatja az 1-est az $(S = 23; y_2 = 19; y_3 = 11)$ konfigurációval, amire viszont az 1-esnek nincs rekontrája, sem önállóan, sem a

$T = 12$ koalícióon keresztül, ahhoz ugyanis legalább $z_1 + z_2 \geq 12 + 19 = 31 > 30 = v(12)$ kifizetés kellene, ami kettőjük számára elérhetetlen. Ugyanakkor az x elosztásnál a w_x maximális többlet játék nem kiegyensúlyozott, hiszen szuperadditív (3.1. állítás 6. pont), de $12 < 15 = \frac{1}{2}(9 + 9 + 12)$, a (2) feltétel szerint tehát a w_x magja üres.

3.2. Megjegyzés. A legalább ötszereplős játékok esetén a 3.1. tételben a játék szuperadditivitása nem gyengíthető le sem a gyengén szuperadditivitásra, sem a kohéziivitásra.

Vegyük például azt az ötszereplős játékot, amelyben $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a koalíciós függvény pedig

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| \leq 1, \\ 2|S| + 1, & \text{ha } S = 12, \\ 2|S| - 1, & \text{ha } S = 345, \\ 2|S| & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy v gyengén szuperadditív és kohézív is. Megjegyezzük ugyanakkor, hogy v nem kiegyensúlyozott, hiszen egy y mag elosztásra teljesülniük kellene az $y_1 + y_2 \geq 5 = v(12)$, $y_1 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 8 = v(1345)$ és $y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 8 = v(2345)$ egyenlőtlenségeknek, viszont ezeket összeadva a $20 = 2v(N) = 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) \geq 5 + 8 + 8 = 21 > 20$ ellentmondást kapnánk, a mag tehát üres.

Az $x = (2; 2; 2; 2; 2)$ elosztásnál a többletek, illetve a maximális többletek:

$$e_x(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 0, \\ -2, & \text{ha } |S| = 1, \\ +1, & \text{ha } S = 12, \\ -1, & \text{ha } S = 345, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad w_x(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } S \supseteq 12, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A w_x maximális többlet játék kiegyensúlyozott, például $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0; 0) \in \text{Co}(w_x)$, mégis az x -nél megalapozott kontra, tehát $x \in M$. Valóban, az x -nél kontrája csak az $i = 1, 2$ játékosok egyikének lehet az egyetlen pozitív többletű $S = 12$ koalícióon keresztül a $j = 3, 4, 5$ játékosok valamelyikével szemben, aki viszont egy $k \neq j$, $k \in \{3, 4, 5\}$ társával együttműködve rekonstrálni tud bármilyen $i \rightarrow j$ kontrát a $(T = jk; z_j = 2; z_k = 2)$ konfigurációval.

3.3. Megjegyzés. A négyszereplős játékok esetén a 3.1. tételben a játék szuperadditivitása nem gyengíthető le a gyengén szuperadditivitásra. Solymosi [35] közöl ugyanis egy olyan négyszereplős gyengén szuperadditív, de nem szuperadditív (tehát nem is kohézív, így nem is kiegyensúlyozott) játékot, amelyben van olyan $x \in M$ elosztás, amelynél w_x kiegyensúlyozott.

A legfeljebb háromszereplős játékok között hasonló ellenpélda nem létezhet, mivel a szuperadditivitás és a gyengén szuperadditivitás ilyenkor ekvivalens tulajdonságok.

A fenti megjegyzések tükrében viszont adódik a kérdés, hogy

- [?] a négyszereplős játékok esetén a 3.1. tételben a játék szuperadditivitása legyengíthető-e a kohéziivitásra?

Sejtésünk szerint igen. Másképpen fogalmazva a kérdés az, hogy

- [?] adható-e olyan négyszereplős kohézív játék, és abban egy olyan $x \in \text{Im} \setminus \text{Co}$ elosztás, hogy a w_x kiegyensúlyozott, de az x -nél mégsincs megalapozott kontra?

Az alábbi, 3.2. tétel szerint, ha a négyszereplős játék kiegyensúlyozott (akár szuperadditív, akár nem), akkor csak a magbeli elosztásoknál nincsen megalapozott kontra, tehát ilyen ellenpélda nem létezhet. Vagyis csak egy kohézív, de nem kiegyensúlyozott és nem szuperadditív négyszereplős játékban fordulhatna esetleg elő egy olyan x elosztás, hogy a w_x kiegyensúlyozott, de az x -nél mégsincs megalapozott kontra. Sejtésünk szerint viszont nem található ilyen ellenpélda.

A teljesség kedvéért vegyük észre, hogy háromszereplős ilyen példa biztosan nincs, hiszen a 2.2. állítás szerint vagy csak a magbeli elosztásoknál nincsen megalapozott kontra (1. eset), vagy csak az egyetlen olyan (az üres magon kívüli) x elosztásnál, amelynél $w_x(ijk) = w_x(ij) = w_x(ik) = w_x(jk) > 0$ (2. eset), ekkor viszont a w_x nem kiegyensúlyozott (lásd a (2) feltételt).

A 3.1. tétel diszkussziója után térjünk vissza az alkuhalmaz és a mag egybeesésének kérdéséhez. A 2.2. állítás 1. pontja szerint ha egy háromszereplős játék kiegyensúlyozott (akár szuperadditív, akár nem), akkor az alkuhalmaz és a mag egybeesnek. Ugyanakkor, Maschler [20] vizsgált egy olyan ötszemélyes teljesen kiegyensúlyozott (tehát szuperadditív) játékot, amelyben a mag az alkuhalmaz szigorú része, vagyis több mint négy szereplő esetén az egybeeséshez a játék valamilyen további specialitása is szükséges. Az alábbi eredmény szerint (a háromszereplős játékokhoz hasonlóan) a négyszereplős játékokban a nyilvánvalóan szükséges kiegyensúlyozottság önmagában is elégséges feltétele az alkuhalmaz és a mag egybeesésének.

3.2. TÉTEL. (Solymosi [36])

Ha egy négyszereplős kooperatív játékban a mag nem üres, akkor azonos az alkuhalmazzal.

Fontos hangsúlyozni, hogy a játékosok kis száma miatt itt nincs szükség a játék szuperadditivitására. A 3.2. tétel tehát teljessé teszi a kisméretű játékokban a klasszikus alkuhalmaz és a mag viszonyára vonatkozó tudásunkat.

Nyitott kérdés viszont, hogy

[?] milyen szerkezetű az alkuhalmaz a négyszereplős nem kiegyensúlyozott játékokban?

Nincsen tudomásunk olyan eredményről, ami az alkuhalmaz pontos leírását adná, még a szuperadditív esetben sem. Maschler [19] ugyan megmutatta, hogy egy (elosztásokkal rendelkező) általános négyszereplős játék alkuhalmaza leírható 150^{12} darab, egyenként 41 lineáris egyenlőtlenségből, illetve egyenlőségből álló rendszer megoldáshalmazának uniójaként, de még részleges válaszok sem ismertek a Maschler [19] által is feltett kutatási kérdésre:

[?] Csökkenthető-e, és ha igen mennyire, az alkuhalmazt alkotó véges sok konvex poliéder számára a négyszereplős esetben adott felső korlát?

A 3.2. tétel mutatja, hogy a kiegyensúlyozott esetben az alkuhalmaz egyetlen lineáris feltételrendszerrel leírható. A konkrét esetekben szerzett tapasztalatok mellett ez is azt sejteti, hogy a négyszereplős játékok alkuhalmazának leírásához szükséges lineáris rendszerek számára a mag üressége esetén is adható az említett 150^{12} -nél nagyságrendekkel kisebb felső korlát is.

4. Néhány speciális szuperadditív játéktípus

A 3.1. tétel segítségével könnyen igazolhatjuk az alkuhalmaz és a mag egybeesését a szuperadditív játékok bizonyos részosztályaira. Amennyiben ugyanis egy speciális típusú szuperadditív játékról megmutatható, hogy az ilyen játékok bármelyik elosztása kiegyensúlyozott maximális többlet játékot indukál (a magbeli elosztásokra ez mindig igaz, hiszen a konstans 0 játékot indukálják), akkor az alkuhalmaznak nem lehet a maghoz nem tartozó eleme, a két megoldáshalmaz tehát egybeesik. Ezen gondolatmenet mentén bizonyíthatók az alább ismertetett ekvivalencia eredmények is. Az egyes játéktípusok pontos definícióját a rövideg kedvéért itt nem adjuk meg, csak utalunk a vonatkozó cikkekre.

A *konvex játékokra* Maschler, Peleg és Shapley [22] bizonyították a mag és az alkuhalmaz azonosságát (egyébként bizonyításuk általánosíthatósága vezetett a 3.1. tételhez). Mivel minden konvex játék szuperadditív és kiegyensúlyozott (Shapley [33]), az 3.1. állítás 7. pontja alapján a 3.1. tételből rögtön következik a két megoldás egybeesése.

A *vétó kontrollált monoton játékokra* a mag és az alkuhalmaz azonossága szintén könnyen bizonyítható (Solymosi [35]). Egy nemnegatív v játékban az $i \in N$ egy *vétó játékos*, ha $v(S) = 0$, valahányszor $S \not\ni i$. A nemnegatív v játék egy i -vétó játék, ha az $i \in N$ vétó játékos v -ben, és azt mondjuk, hogy *vétó kontrollált*, ha van benne vétó játékos. Könnyen belátható, hogy

- minden vétó kontrollált monoton játék szuperadditív és kiegyensúlyozott;

- ha v egy monoton i -vétó játék, akkor tetszőleges $x \in \text{Im}$ elosztás által indukált w_x maximális többlet játék is egy monoton i -vétó játék.

Ezen két megállapítás alapján a 3.1. tételből rögtön következik a két megoldás ekvivalenciája ezen a játékosztályon. Speciális esetként egy új bizonyítást kapunk a következő ismert eredményekre: a mag és az alkuhalmaz egybeesnek

- a vétó kontrollált monoton egyszerű játékokban (Einy, Wettstein [7]);
- a klán (clan) játékokban (Potters et al. [30]), speciális esetként, a nagyfőnök (big boss) játékokban (Potters et al. [29]).

A *hozzárendelési játékok*at Shapley és Shubik [34] használták először oszthatatlan termékek kétoldalú piacainak alapmodelljeként. Igazolták, hogy minden hozzárendelési játék teljesen kiegyensúlyozott, tehát szuperadditív is. A 3.1. tételre támaszkodva Solymosi [35] állapította meg, hogy

- hozzárendelési játékokban a mag egybeesik az alkuhalmazzal,

mivel korábban Granot és Granot [11] már igazolták, hogy egy hozzárendelési játék bármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is egy hozzárendelési játék, tehát kiegyensúlyozott.

A *permutációs játékok*at Tijs et al. [42] vezették be bizonyos többszereplős feladat ütemezési (scheduling, sequencing) helyzetekben felmerülő költség elosztási problémák modelljeként. Megmutatták, hogy minden permutációs játék teljesen kiegyensúlyozott, tehát szuperadditív is. A 3.1. tételt alkalmazva Solymosi, Raghavan és Tijs [37] bizonyították, hogy

- permutációs játékokban a mag egybeesik az alkuhalmazzal,

mivel igazolták, hogy egy permutációs játék bármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is egy permutációs játék, tehát kiegyensúlyozott. A permutációs játékok egyébként tekinthetők a hozzárendelési játékok egyfajta általánosításának is, mivel az utóbbiak beágyazhatók az előbbiek halmazába (Curiel, Tijs [4]).

A *partíciós játékok* (Kaneko, Wooders [17]) a hozzárendelési játékok más jellegű általánosításai. Ez a játéktípus két szempontból is érdekes. Egyrészt modellkeretet ad a valamilyen külső tényező (például a közvetlen kommunikációs csatornák hiánya) miatt csak korlátozott együttműködési lehetőségekkel rendelkező döntési helyzetek vizsgálatának (Myerson [25], Owen [27]). Másrészt számos teljes kooperációs, de speciális struktúrájú játéktípus tekinthető partíciós játéknak, amennyiben előre megadható a koalícióknak egy \mathcal{B} részhalmaza úgy, hogy a teljes játék felépíthető az ezekből a *bázis-koalíciók*ból álló maximális értékű partíciókon keresztül. A hozzárendelési játékokon kívül speciális partíciós játékok, például a

faösszefüggő additív játékok is (Potters, Reijnierse [31]), speciálisan, a nagyfőnök (big boss) játékok (a fa egy csillag), illetve az egykiszolgálós ütemezési játékok (a fa egy lánc) (Curiel, Pederzoli, Tijs [3]) is.

Minden partíciós játék szuperadditív. A \mathcal{B} báziskollekcióra (és bármelyik belőle generált \mathcal{B} -partíciós játékra) azt mondjuk, hogy *erősen kiegyensúlyozott*, ha a \mathcal{B} -partíciós játékok mindegyikének nem üres a magja, függetlenül a báziskoalíciók értékétől. Ennek a tulajdonságnak egyébként a kombinatorikus optimalizálásban számos ekvivalens jellemzése ismert. A 3.1. tételt alkalmazva Solymosi [38] igazolta, hogy

- erősen kiegyensúlyozott partíciós játékokban a mag és az alkuhalmaz egybeesnek.

A bizonyítás lényege itt is az adott játékosztály zártága a maximális többlet játék képzésére nézve. Solymosi [38] megmutatta, hogy ha rögzítünk egy \mathcal{B} báziskollekciót, az ebből generált bármelyik \mathcal{B} -partíciós játék akármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is egy \mathcal{B} -partíciós játék lesz. Speciálisan, ha \mathcal{B} erősen kiegyensúlyozott, akkor bármelyik \mathcal{B} -partíciós játék akármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is (erősen) kiegyensúlyozott lesz. Innen pedig a 3.1. tételből következik a mag és az alkuhalmaz azonossága. Mivel a hozzárendelési játékok, illetve a faösszefüggő additív játékok báziskollekciója is erősen kiegyensúlyozott (Kaneko, Wooders [17], Le Breton et al. [18]), speciális esetként egy újabb bizonyítást kapunk az alkuhalmaz és a mag korábbról már ismert azonosságára ebben a két játékosztályban (Solymosi [35], Potters, Reijnierse [31]).

Az *egyszerű hálózati játékok* (Kalai, Zemel [16]) is partíciós játékok, de nem tartoznak az erősen kiegyensúlyozott típusba, mert a báziskoalícióknak nem minden elképzelhető, hanem csak bizonyos, az adott játékosztály előállításához szükséges (például az additív) értékelései mellett lesznek a generált játékok kiegyensúlyozottak. Kalai és Zemel [16] igazolták, hogy az egyszerű hálózati játékok teljesen kiegyensúlyozottak, tehát szuperadditívak is. A 3.1. tételre támaszkodva Solymosi [38] bizonyította, hogy

- egyszerű hálózati játékokban a mag egybeesik az alkuhalmazzal,

felhasználva Granot, Granot és Zhou [12] egy korábbi eredményét, miszerint egy egyszerű hálózati játék bármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is egy egyszerű hálózati játék, tehát kiegyensúlyozott.

Az *eladó-cég-vevő játékok*, vagy általánosabban a lokálisan additív többoldalú hozzárendelési játékok szintén teljesen kiegyensúlyozott (de nem erősen kiegyensúlyozott) partíciós játékok, tehát szuperadditívak is (Stuart [39]). A 3.1. tételt alkalmazva Atay és Solymosi [1] bizonyították, hogy

- eladó-cég-vevő játékokban a mag egybeesik az alkuhalmazzal,

mivel igazolták, hogy egy eladó-cég-vevő játék bármelyik elosztásához tartozó maximális többlet játék is egy eladó-cég-vevő játék, tehát kiegyensúlyozott.

5. Néhány egyéb alkuhalmaz

Az eddig tárgyalt (klasszikus) alkuhalmaz mellett számtalan egyéb kontrákra és rekontrákra épülő (halmazértékű) megoldási koncepció található a szakirodalomban. Bőséges listát közöl Maschler [21], de ez a kitűnő áttekintő dolgozat már csak a keletkezési ideje miatt sem lehet teljeskörű. Mi itt kísérletet sem teszünk az összes alkuhalmaz változat számbavételére, csupán három másik variánst említünk.

A *reaktív alkuhalmaz* (Granot [9], [10]) abban hasonlít a klasszikus alkuhalmazra, hogy itt is egyéni játékosok kontráznak, illetve rekontráznak egyéni játékosokat. A különbség abban van közöttük, hogy a modellezni kívánt alkufolyamatban a „támadó” játékos először a kontrájának milyen részleteit fedi fel a „védekező” játékos számára. A klasszikus alkuhalmaz esetében rögtön a teljes kontrát, a koalíciót és a megemelt új kifizetéseket is. A reaktív alkuhalmaz esetében viszont először csak a kontra tényét közli, sem a koalíciót, sem az új kifizetéseket nem árulja el. A védekező játékosnak viszont válaszában meg kell adnia, hogy melyik koalíción keresztül fog védekezni. A támadó játékos erre reagálva (innen az elnevezés), már ennek ismeretében határozhatja meg a kontrája részleteit. A védekező játékos pedig vagy képes úgy csoportosítani a meghirdetett koalíciója által elérhető kifizetéseket, hogy az rekontra legyen, vagy sem. Ilymódon nyilván könnyebb megalapozott kontrákkal előállni, a reaktív alkuhalmaz tehát részhalmaza a klasszikus alkuhalmaznak. Ugyanakkor nyilvánvalóan a reaktív alkuhalmaz is tartalmazza a magot (az akár üres, akár nem). Granot [9], [10] bizonyította, hogy a reaktív alkuhalmaz nem üres, ha a játék elosztáshalmaza nem üres, továbbá, hogy legfeljebb háromszereplős játékokban egybeesik a klasszikus alkuhalmazzal. Bemutatott ugyanakkor egy olyan gyengén kohézív (de nem gyengén szuperadditív és nem is kohézív) négyszereplős játékot, amelyben a reaktív alkuhalmaz szigorúan szűkebb, mint a klasszikus alkuhalmaz. E két megoldás viszonyának pontosabb felderítésében vélhetően hasznos lenne tudni, hogy

? a maximális többlet játékok segítségével jellemezhető-e a reaktív alkuhalmaz?

A reaktív és a klasszikus alkuhalmaz hasonlóságait és különbözőségeit tárgyalja Granot és Maschler [13]. Megmutatják például, hogy egy (elosztásokkal rendelkező) általános négyszereplős játék reaktív alkuhalmaza leírható 5^{12} darab, egyenként 53 lineáris egyenlőtlenségből, illetve egyenlőségből álló rendszer megoldáshalmazának uniójaként. A tartalmazási relációkból és a 3.2. tételből következik, hogy a kiegyensúlyozott esetben a reaktív alkuhalmaz is azonos a maggal, tehát egyetlen lineáris feltételrendszerrel is leírható. Tudomásunk szerint itt is nyitottak még a következő kérdések:

? Milyen feltételek mellett esik egybe a reaktív alkuhalmaz és a klasszikus alkuhalmaz a négyszereplős nem kiegyensúlyozott játékok osztályán?

- [?] Milyen szerkezetű a reaktív alkuhalmaz a négyszereplős nem kiegyensúlyozott játékokban?
- [?] Csökkenthető-e, és ha igen mennyire, egy négyszereplős játék reaktív alkuhalmazát alkotó véges sok konvex poliéder számára adott felső korlát?

A klasszikus alkuhalmazzal kapcsolatos sejtésünk alapján úgy gondoljuk, hogy a reaktív alkuhalmaz esetében is adható az említett 5^{12} -nél sokkal kisebb felső korlát is.

Granot és Maschler [13] azt is igazolták, hogy Maschler [20] híres ötszereplős teljesen kiegyensúlyozott játékában a reaktív alkuhalmaz egybeesik a klasszikus alkuhalmazzal, tehát a reaktív alkuhalmaz is szigorúan bővebb, mint a mag. Ugyanakkor, már az előző fejezetben ismertetett eredményeket megelőzően ismert volt, hogy a reaktív alkuhalmaz nem bővebb a magnál a hozzárendelési játékokban (Granot [9]), illetve az egyszerű hálózati játékokban (Granot, Granot, Zhou [12]). Érdekes volna olyan speciális szerkezetű, kiegyensúlyozott játéktípus(oka)t ismerni, ahol a reaktív alkuhalmaz szigorúan tartalmazza a magot, de szigorúan szűkebb a klasszikus alkuhalmaznál.

A *szemireaktív alkuhalmaz* (Sudhölter, Potters [40]) által modellezett alkufolyamatban a támadó játékos rögtön közli a kontrájában használt koalíciót, de az új kifizetéseket majd csak akkor árulja el, ha a védekező játékos megadta, hogy melyik koalíción keresztül fog védekezni. A támadó játékos már ennek ismeretében határozhatja meg az általa megnevezett koalíció tagjainak szánt megemelt új kifizetéseket, amiket a védekező játékos vagy képes megadni az ő koalíciójában is szereplő játékosoknak, és tartani az eredeti kifizetést a többieknek, vagy sem. Ebben az esetben is nyilván könnyebb megalapozott kontrákkal előállni, mint ha rögtön mindent elárult volna, de nehezebb, mint ha csak a kontra tényét közölné. A szemireaktív alkuhalmaz tehát szűkebb, mint a klasszikus alkuhalmaz, de tartalmazza a reaktív alkuhalmazt. Következésképpen, a szemireaktív alkuhalmaz sem üres, ha a játék elosztáshalmaza nem üres, továbbá, legfeljebb háromszereplős játékokban egybeesik a klasszikus alkuhalmazzal. Sudhölter és Potters [40] közölnek egy olyan gyengén szuperadditív, de nem kohézív négyszereplős játékot, amelyben a reaktív alkuhalmaz szigorúan szűkebb, mint a szemireaktív alkuhalmaz, illetve egy olyan gyengén szuperadditív, de nem kohézív négyszereplős játékot, amelyben a szemireaktív alkuhalmaz szigorúan szűkebb, mint a klasszikus alkuhalmaz. Itt is felmerülnek a következő kérdések:

- [?] A maximális többlet játékok segítségével jellemezhető-e a szemireaktív alkuhalmaz?
- [?] Milyen feltételek mellett esik egybe a szemireaktív alkuhalmaz a reaktív alkuhalmazzal, illetve a klasszikus alkuhalmazzal a négyszereplős nem kiegyensúlyozott játékok osztályán?

[?] Milyen szerkezetű a szemireaktív alkuhalmaz a négyszereplős nem kiegyensúlyozott játékokban?

Sudhölter és Potters [40] ugyan megmutatták, hogy a szemireaktív alkuhalmaz is véges sok konvex poliéder uniója, de bizonyításukban expliciten nem adták meg azokat a logikai műveletekkel összekapcsolt lineáris feltételrendszereket, amelyek leírják a szemireaktív alkuhalmazt. Nincs tudomásunk ilyen irányú eredményekről, így már a legkisebb nem triviális esetben, a négyszereplős általános játékokra sem tudunk ismertetni felső korlátot ezeknek a lineáris feltételrendszereknek a méretére, illetve a számára vonatkozóan.

A *Mas-Colell-alkuhalmaz* (Mas-Colell [24]) is kontrákra és rekontrákra épül, de egyrészt itt koalíciók alkudoznak koalíciókkal, másrészt a kontrák és a rekontrák is kicsit mást jelentenek, mint az eddig tárgyalt (klasszikus, reaktív, szemireaktív) alkuhalmazoknál, harmadrészt a megengedett kifizetésvektorok köre nem korlátozódik az elosztásokra, elvben bármilyen szétosztás szóba jöhet.

Egy (N, v) játékban a szétosztások (sosem üres) halmazát jelölje $\text{Im}^*(N, v)$. Egy adott $x \in \text{Im}^*(N, v)$ szétosztásnál az (S, y) pár, ahol $\emptyset \neq S \subseteq N$, és $y \in \mathbb{R}^S$, egy *gyenge kontra*, ha $y(S) = v(S)$, továbbá $y_k \geq x_k$ minden $k \in S$ -re, és legalább egy $k \in S$ -re az egyenlőtlenség szigorú. Az (S, y) gyenge kontrára a (T, z) pár, ahol $T \subseteq N$ és $z \in \mathbb{R}^T$, egy *erős rekontra*, ha $z(T) = v(T)$, továbbá $z_k \geq y_k$ minden $k \in T \cap S$ -re, $z_k \geq x_k$ minden $k \in T \setminus S$ -re, és legalább egy $k \in T$ -re az egyenlőtlenség szigorú. Vegyük észre, hogy nincs semmi kikötés a gyenge kontrában szereplő S és az erős rekontrában szereplő T koalíciókra, az egyik akár részhal-maza is lehet a másíknak. A *Mas-Colell-alkuhalmaz* azon szétosztások halmaza, amelyeknél minden gyenge kontrára van erős rekontra, másképpen, amelyeknél nincsen *Mas-Colell-féle megalapozott kontra*.

Mas-Colell [24] bizonyította, hogy a Mas-Colell-alkuhalmaz bármilyen játékban nem üres (szétosztások minden játékban vannak), továbbá, hogy tartalmazza a magot (mag elosztásoknál gyenge kontrák sincsenek). Visszont Mas-Colell [24] közölt egy olyan négyszereplős teljesen kiegyensúlyozott (tehát szuperadditív) játékot, amelyben a Mas-Colell-alkuhalmaz tartalmaz magon kívüli elosztást is. Giménez-Gómez és Vilella [8] bizonyította, hogy háromszereplős szuperadditív és kiegyensúlyozott játékokban a mag azonos a Mas-Colell-alkuhalmazzal, de a szuperadditivitás nélkül az egybeesés már nem feltétlenül teljesül. Természetszerűleg adódik a kérdés, hogy

[?] milyen szerkezetű a Mas-Colell-alkuhalmaz a háromszereplős, esetleg a négyszereplős nem szuperadditív és/vagy nem kiegyensúlyozott játékokban?

Ezekben a vizsgálatokban is nagyon hasznos lehet a következő eredmény, ami a 3.1. tétellel van szoros kapcsolatban.

5.1. TÉTEL. (Holzman [15])

Tetszőleges v játékban, az $x \in \text{Im}^(v) \setminus \text{Co}(v)$ szétosztásnál pontosan akkor van*

Mas-Colell-féle megalapozott kontra, ha a w_x maximális többlet játék kiegyensúlyozott.

Kiemeljük, hogy ez a tétel a Mas-Colell-alkuhalmaz elemeinek egy karakterizációját adja, a maximális többlet játék kiegyensúlyozottsága alapján bármelyik szétoosztásról pontosan eldönthető, hogy a halmazba tartozik-e, vagy sem. A 3.1. tétel szerint viszont ugyanezzel a segédeszközzel az elosztásoknak csak egy olyan halmazát tudjuk azonosítani, amely biztosan (de általában szigorúan) tartalmazza a klasszikus alkuhalmazt, ráadásul a 3.1. tétel csak a szuperadditív esetben általános érvényű. A 3.1. és 5.1. tételek összevetéséből adódik Holzman [15] egy másik fontos eredménye:

- szuperadditív játékokban a Mas-Colell-alkuhalmaz tartalmazza a klasszikus alkuhalmazt,

mivel a szétoosztások halmaza bővebb, mint az elosztások halmaza.

A 5.1. tétel segítségével több (teljesen) kiegyensúlyozott játéktípusra könnyen igazolható a Mas-Colell-alkuhalmaz és a mag egybeesése. Az előző fejezetben használt gondolatmenetet követve, ha bizonyítható, hogy tetszőleges szétoosztásnál a maximális többlet játék is az adott játékosztályba tartozik, tehát kiegyensúlyozott, akkor magon kívüli szétoosztás nem tartozhat a Mas-Colell-alkuhalmazba, tehát egybeesnek.

Például, a *konvex játékokra* az 3.1. állítás 7. pontja alapján a 5.1. tételből rögtön következik a Mas-Colell-alkuhalmaz és a mag egybeesése is, mivel minden konvex játék (teljesen) kiegyensúlyozott (Shapley [33]).

A *vétó kontrollált monoton játékokra* is erősíthető az előző fejezetben tárgyalt ekvivalencia eredmény (Solymosi [35]) a magnak a Mas-Colell-alkuhalmazzal való egybeesésére. Bizonyításunk a következő:

Legyen v egy monoton i -vétó játék, a 0-normalizáltját jelölje v^0 . Mivel $v(j) = 0$ minden $j \neq i$ -re, nyilván v^0 is egy monoton i -vétó játék, tehát szuperadditív is. Alkalmazhatjuk tehát v^0 -ra Atay és Solymosi [1] észrevételét, miszerint

- egy szuperadditív 0-normalizált játékban egy x szétoosztás által indukált maximális többlet játék 0-normalizáltja ugyanaz, mint a szétoosztás pozitív része által indukált maximális többlet játék, azaz $w_x^0(S) = w_{x^+}(S)$ minden $S \subseteq N$ -re, ahol $x_i^+ = \max\{x_i, 0\}$ minden $i \in N$ -re.

Vegyünk egy tetszőleges x szétoosztást a v^0 monoton i -vétó játékban. Mivel $v^0(T) = 0$ minden $T \subseteq N \setminus \{i\}$ -re, és $x_i^+ \geq 0$ minden $i \in N$ -re, a v^0 többlet játékában $e_{x^+}(T) \leq 0$ minden $T \subseteq N \setminus \{i\}$ -re, tehát a maximális többlet játékában $w_{x^+}(N \setminus \{i\}) = 0$, vagyis az i egy vétó játékos a (definíció szerint) monoton w_{x^+} játékban. Kapjuk, hogy a $w_x^0 = w_{x^+}$ játék kiegyensúlyozott. A 5.1. tételből, valamint a magnak és a Mas-Colell-alkuhalmaznak a 0-normalizálásra való kovarianciájából következik, hogy

- vétó kontrollált monoton játékokban a mag és a Mas-Colell-alkuhalmaz egybeesnek.

Megjegyezzük, hogy a vétó kontrollált monoton egyszerű játékokra Einy és Wettstein [7] ezt az ekvivalenciát már igazolták.

Végezetül megemlítjük, hogy az előző fejezetben tárgyalt mindegyik további játékosztályra is igaz az erősebb mag ekvivalencia is, mivel mindegyik említett játékosztály tartalmazza a tetszőleges szétszétátnál vett maximális többlet játékot is. Ezen állítások bizonyítása megtalálható az alább felsorolt munkákban.

5.2. TÉTEL. *A mag azonos a Mas-Colell-alkuhalmazzal*

- *a permutációs játékokban (Solymosi, Raghavan, Tijis [37]);*
- *az erősen kiegyensúlyozott partíciós játékokban, speciálisan a hozzárendelési játékokban, illetve a faösszefüggő additív játékokban (Solymosi [38]);*
- *az egyszerű hálózati játékokban (Solymosi [38]);*
- *az eladó-cég-vevő játékokban (Atay, Solymosi [1]).*

Az írásunkban ismertetett számos egybeesési eredmény alapján meggyőződésünk, hogy a maximális többlet játékok kiegyensúlyozottságának vizsgálatával számos további (teljesen) kiegyensúlyozott játéktípusra is viszonylag könnyen igazolhatók (vagy cáfolhatók) lesznek különféle, elsősorban a klasszikus és a Mas-Colell-alkuhalmazokkal kapcsolatos mag ekvivalencia eredmények.

Az alkuhalmazokkal való további ismerkedésre az itt említett munkákon kívül elsősorban a (Peleg, Sudhölter [28]), illetve (Maschler, Solan [23]) könyvek megfelelő fejezeteit ajánljuk.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszöni az NKFIH-nak a K-119930 pályázat, illetve az MTA-nak a Kiválósági Együttműködési Program (KEP-6/2017) keretében nyújtott támogatását.

Hivatkozások

- [1] ATAY, A. AND SOLYMOSI, T.: *On bargaining sets of supplier-firm-buyer games*, Economics Letters, Vol. **167**, pp. 99-103 (2018).
- [2] AUMANN, R.J. AND MASCHLER, M.: *The bargaining set for cooperative games*. In: Dresher M, Shapley LS, Tucker AW (eds.) *Advances in game theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., pp. 443-476 (1964).

- [3] CURIEL, IJ., PEDERZOLI, G. AND TIJS, SH.: *Sequencing games*, European Journal of Operational Research, Vol. **40**, pp 344-351 (1988).
- [4] CURIEL, IJ. AND TIJS, SH.: *Assignment games and permutation games*, Methods of Operations Research, Vol. **54**, pp. 323-334 (1986).
- [5] DAVIS, M. AND MASCHLER M.: *Existence of stable payoff configurations for cooperative games* (abstract), Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. **69**, pp. 106-108 (1963).
- [6] DAVIS, M. AND MASCHLER, M.: *Existence of stable payoff configurations for cooperative games*, In: *Essays in mathematical economics in honour of Oskar Morgenstern*, Shubik M (ed.) Princeton University Press, Princeton, N.J., pp. 39-52 (1967).
- [7] EINY, E. AND WETTSTEIN, D.: *Equivalence between bargaining sets and the core of simple games*, International Journal of Game Theory, Vol. **25**, pp. 65-71 (1996).
- [8] GIMÉNEZ-GÓMEZ, J-M. AND VILELLA C.: *On the coincidence of the Mas-Colell bargaining set and the core*, CREIP Document de treball n.23-2013, Universitat Rovira i Virgili, Reus, Spain (2013).
- [9] GRANOT, D.: *On a new bargaining set of cooperative games, kézirat*, Faculty of Commerce and Business Administration, University of British Columbia, Vancouver, Kanada (1994).
- [10] GRANOT, D.: *The reactive bargaining set for cooperative games*, International Journal of Game Theory, Vol. **39**, pp. 163-170 (2010).
- [11] GRANOT, D. AND GRANOT F.: *On some network flow games*, Mathematics of Operations Research, Vol. **17**, pp. 792-841 (1992).
- [12] GRANOT, D., GRANOT F. AND ZHU, WR.: *The reactive bargaining set of some flow games and superadditive simple games*, International Journal of Game Theory, Vol. **26**, pp. 207-214 (1997).
- [13] GRANOT, D. AND MASCHLER, M.: *The reactive bargaining set: Structure, dynamics and extension to NTU games*, International Journal of Game Theory, Vol. 26, pp. 75-95 (1997).
- [14] HARSANYI, J.: *A general theory of rational behavior in game situations*, Econometrica, Vol. **34**, pp. 613-634 (1966).
- [15] HOLZMAN, R.: *The comparability of the classical and the Mas-Colell bargaining sets*, International Journal of Game Theory, Vol. **29**, pp. 543-553 (2000).
- [16] KALAI, E. AND ZEMEL, E.: *Generalized network problems yielding totally-balanced games*, Operations Research, Vol. **30**, pp. 998-1008 (1982).
- [17] KANEKO, M. AND WOODERS, M.: *Cores of partitioning games*, Mathematical Social Sciences, Vol. **3**, pp. 313-327 (1982).
- [18] LE BRETON, M., OWEN, G. AND WEBER, S.: *Strongly balanced cooperative games*, International Journal of Game Theory, Vol. **20**, pp. 419-427 (1992).
- [19] MASCHLER, M.: *The inequalities that determine the bargaining set $M_1^{(i)}$* , Israel Journal of Mathematics, Vol. **4**, pp. 127-134 (1966).
- [20] MASCHLER, M.: *An advantage of the bargaining set over the core*, Journal of Economic Theory, Vol. **13**, pp. 184-192 (1976).

- [21] MASCHLER, M.: *The bargaining set, kernel, and nucleolus*, In: *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Volume 1, Aumann R, Hart S (eds), Chapter 18, pp. 591-667, Elsevier (1992).
- [22] MASCHLER, M., PELEG, B. AND SHAPLEY, L.: *The kernel and bargaining set for convex games*, International Journal of Game Theory, Vol. 1, pp. 73-93 (1972).
- [23] MASCHLER, M., SOLAN, E. AND ZAMIR, S.: *Game Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (2013).
- [24] MAS-COLELL, A.: *An equivalence theorem for a bargaining set*, Journal of Mathematical Economics, Vol. 18, pp. 129-139 (1989).
- [25] MYERSON, R.: *Graphs and cooperation in games*, Mathematics of Operations Research, Vol. 2, pp. 225-229 (1977).
- [26] NEUMANN, J VON, MORGENSTERN, O.: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1944).
- [27] OWEN, G.: (1986) *Values of graph-restricted games*, SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods, Vol. 7, pp. 210-220 (1986).
- [28] PELEG, B. AND SUDHÖLTER, P.: *Introduction to the Theory of Cooperative Games* Kluwer Academic Publishers, Boston / Dordrecht / London, 2003.
- [29] POTTERS, JAM., MUTO, S. AND TIJS, SH.: *Bargaining set and kernel of big boss games*, Methods of Operations Research, Vol. 60, pp. 329-335 (1990).
- [30] POTTERS, JAM, POOS, TIJS, SH. AND MUTO, S.: *Clan games*, Games and Economic Behavior, Vol. 1, pp. 275-293 (1989).
- [31] POTTERS, JAM. AND REIJNIERSE, J.: *Gamma-component additive games*, International Journal of Game Theory, Vol. 24, pp. 49-56 (1995).
- [32] REIJNIERSE, J., MASCHLER, M., POTTERS, JAM. AND TIJS SH.: *Simple flow games*, Games and Economic Behavior, Vol. 16, pp. 238-260 (1996).
- [33] SHAPLEY, L.: *Cores of convex games*, International Journal of Game Theory, Vol. 1, pp. 11-26 (1971).
- [34] SHAPLEY, L. AND SHUBIK, M.: *The assignment game I: The core*, International Journal of Game Theory, Vol. 1, pp. 111-130 (1972).
- [35] SOLYMOSI, T.: *On the bargaining set, kernel and core of superadditive games*, International Journal of Game Theory, Vol. 28, pp. 229-240 (1999).
- [36] SOLYMOSI, T.: *The bargaining set of four-person balanced games*, International Journal of Game Theory, Vol. 31, pp. 1-11 (2002).
- [37] SOLYMOSI, T., RAGHAVAN, TES. AND TIJS, S.: *Bargaining sets and the core in permutation games*, Central European Journal of Operations Research, Vol. 11, pp. 93-101 (2003).
- [38] SOLYMOSI, T.: *Bargaining sets and the core in partitioning games*, Central European Journal of Operations Research, Vol. 16 No. 4 pp. 425-440 (2008).
- [39] STUART, H.: *The supplier-firm-buyer game and its m-sided generalization*, Mathematical Social Sciences, Vol. 34 No. 1, pp. 21-27 (1997).

- [40] SUDHÖLTER, P. AND POTTERS, JAM.: *The semireactive bargaining set of a cooperative game*, International Journal of Game Theory, Vol. **30**, pp. 117-139 (2001).
- [41] TCHANTCHO, H., MOYOUWOU, I. AND ANDJIGA, NG.: *On the bargaining set of three-player games*, Economics Bulletin, Vol. **32** No. **1**, pp. 429-436 (2012).
- [42] TIJS, S., PARTHASARATHY, T., POTTERS, J. AND RAJENDRA PRASAD, V.: *Permutation games: Another class of totally balanced games*, OR Spektrum, Vol. **6**, pp. 119-123 (1984).



Solymosi Tamás 1960-ban született Gyomán. A szegedi József Attila Tudományegyetemen szerzett okleveles matematikus diplomát, majd három év programozói munka után a University of Illinois at Chicago-n (UIC) folytat PhD-tanulmányokat. Közben egyetemi (kis)doktori címet szerez a JATE-n és a szegedi MTA Automataelméleti Kutatócsoport tagja lesz. PhD-fokozatát az UIC-n 1993-ban szerzi meg az "On the nucleolus of cooperative games" című disszertációjával. 1995-től a Budapesti Közgazdaságtudományi, később Corvinus Egyetem adjunktusa, majd docense, 2015-től pedig egyetemi tanára. Közben két évig Magyar Zoltán posztdoktori, majd három-három évig Széche-

nyi István, illetve Bolyai János kutatási ösztöndíjas. Kutatási területe a kooperatív játékok elmélete és alkalmazásai. Több kutatási pályázat témavezetője, kb. 40 tudományos közlemény (társ)szerzője, több mint 400 független hivatkozással. 2006 óta az International Journal of Game Theory szerkesztőbizottsági tagja.

SOLYMOSI TAMÁS

Budapesti Corvinus Egyetem
 Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
 Budapest, Fővám tér 8.
 tamas.solymosi@uni-corvinus.hu

COINCIDENCE OF BARGAINING SETS AND THE CORE

TAMÁS SOLYMOSI

The core is the most frequently studied set-valued solution of cooperative games. It embodies the basic stability requirement that the allocation of the grand coalition value must be acceptable for all coalitions. In many games no such allocation exists, hence other solution concepts which are nonempty even for games with empty core are also needed. Among the plethora of available nonempty core extensions, here only the best known bargaining sets are discussed. The common feature of the various bargaining sets is that, in addition to core allocations, they also admit non-core imputations at which disruption by a coalition could happen, but can be prevented by raising the payoffs to the disruptive players. The aim of the paper is to give an introductory overview of known results, augmented by some new observations and open questions, on the coincidence of the core and the classical, the reactive, the semireactive, and the Mas-Colell bargaining sets.

A LOGARITMIKUS LEGKISEBB NÉGYZETEK MÓDSZERÉNEK KARAKTERIZÁCIÓI

CSATÓ LÁSZLÓ

Többszempon্তু döntési problémák megoldása során gyakran szükségessé válik súlyvektor számítása a döntéshozó által megadott páros összehasonlítás mátrixból. Az e célra szolgáló módszerek közötti választás egyik lehetséges útja az axiomatikus megközelítés alkalmazása. A cikk az egyik legnépszerűbb eljárás, a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere, valamint az ezáltal generált rangsor egy-egy axiomatikus karakterizációját mutatja be.

1. Bevezetés

Döntési problémák modellezésekor számtalan alkalommal találkozhatunk a páros összehasonlítások fogalmával: a döntéshozónak azt a kérdést tesszük fel, hány-szor tekinti az egyik elemet jobbnak vagy nagyobb-nak a másiknál. A kapott választások jellemzően nem teljesítik a *konzisztencia* követelményét, megtörténhet, hogy A alternatíva kétszer jobb, mint B , B pedig háromszor jobb C -nél, ennek ellenére A nem hatszor jobb C -nél. Ugyanez a jelenség előfordulhat objektív adatokból felírt páros összehasonlítás mátrixok esetén is, például országok rangsorolásánál [39], de a sportban sem ismeretlen a „körbeverés” jelensége [5, 10, 16, 19]. Ilyenkor egyáltalán nem triviális feladat az *inkonzisztens* páros összehasonlításokból adódó preferenciákat a legjobban közelítő súlyvektor meghatározása, az irodalomban nem véletlenül javasoltak különböző módszereket erre a célra [12].

Az eljárások közötti választás egyik lehetséges útja az axiomatikus megközelítés alkalmazása, vagyis néhány, a módszerektől „elvárt” tulajdonság bevezetése, majd annak vizsgálata, mely eljárások teljesítik azokat. [36] könyvében három lehetséges esetet említ az axiómák kapcsolatáról: (I) az axiómák ellentmondóak, egyetlen módszer sem elégítheti ki egyszerre mindegyiket; (II) pontosan egy módszer teljesíti az axiómákat, azok *karakterizálják* az adott eljárást; (III) az axiómák több módszer alkalmazását is megengedik. Ezentúl a leginkább „vágyott” (II) esetben, a karakterizáció bizonyításában meg szokás vizsgálni a felhasznált axiómák logikai függetlenségét, mert kiderülhet, esetleg kevesebb is elég a kívánt eredmény eléréséhez. Ere kiváló példa [9] eredménye a Kemény-távolság eredeti karakterizációjában szereplő egyik tulajdonság redundanciájáról.

Az utóbbi években hazai kutatók többször foglalkoztak bizonyos módszerek axiomatikus megalapozásával, elsősorban a játékelmélet területén. Az *Alkalmazott Matematikai Lapok* hasábjain [40] tárgyalta a Shapley-érték axiomatizálásait. [46] a Shapley-érték, [27] az arányos csődszabály, [45] egy szakértők kiválasztására alkalmas eljárás karakterizációját adta. [20] és [24] az első axiomatizációk a páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának mérésében. A felsorolásból nem hiányozhatnak a lehetetlenségi tételek, az axiómák összeegyeztethetetlenségével kapcsolatos eredmények sem: [28] a kockázatosztás, [22] és [23] a páros összehasonlításokon alapuló sport rangsorolás területén jutott „negatív” eredményre.

A következőkben a páros összehasonlítás mátrixok súlyvektorának számításával kapcsolatos axiomatizációkat tárgyalunk. Az 1. fejezet a főbb elméleti fogalmakat, az 1. fejezet az irodalmi előzményeket ismerteti. Az 1. fejezet a súlyozási módszerekre (1. alfejezet), illetve a rangsorolási eljárásokra (1. alfejezet) vonatkozó tulajdonságokat mutatja be. Tételeinket az 1. fejezetben mondjuk ki. Miután e cikk összefoglaló céllal íródott, a bizonyítások – nagyrészt technikai – részleteit nem közöljük, az érdeklődő olvasó a kapcsolódó munkákban [21, 25] megtalálja azokat. Végül az 1. fejezet néhány következtetést, ígéretes kutatási irányt fogalmaz meg.

2. A súlyvektor számítása

Célunk n alternatíva rangsorának meghatározása páronkénti összehasonlításaik alapján. Legyen a_{ij} az i alternatíva j alternatívához viszonyított relatív értékelése, a „Hányszor jobb az i alternatíva a j alternatívánál?” kérdésre adott numerikus válasz.

Jelölje \mathbb{R}_+^n és $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ a pozitív (minden elem nullánál nagyobb) n elemű vektorok és $n \times n$ -es mátrixok halmazát. Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$ az alternatívák halmaza.

2.1. Definíció. Páros összehasonlítás mátrix: Az $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ mátrix páros összehasonlítás mátrix, ha $a_{ji} = 1/a_{ij}$ minden $1 \leq i, j \leq n$ -re.

Jelölje $\mathcal{A}^{n \times n}$ az $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrixok halmazát.

Az \mathbf{A} páros összehasonlítás mátrixot *konzisztensnek* nevezzük, amennyiben $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$ minden $1 \leq i, j, k \leq n$ esetén. Ellenkező esetben a mátrix *inkonzisztens*. Egy \mathbf{A} páros összehasonlítás mátrix akkor és csak akkor konzisztens, ha elemei előállnak az $a_{ij} = w_i/w_j$ alakban.

2.2. Definíció. Súlyvektor: A $\mathbf{w} = [w_i] \in \mathbb{R}_+^n$ vektor *súlyvektor*, ha

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Legyen \mathcal{R}^n az n elemű súlyvektorok halmaza.

2.3. Definíció. *Súlyozási módszer:* Az $f : \mathcal{A}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{R}^n$ függvény egy *súlyozási módszer*.

A súlyozási módszer minden páros összehasonlítás mátrixhoz egy súlyvektort rendel. Az irodalomban számos különböző súlyozási módszert javasoltak (ismertetésüket lásd [12]), az egyik legnépszerűbb az alábbi.

2.4. Definíció. *Logaritmikus legkisebb négyzetek módszere (LLSM)* [14, 15, 29, 30, 41]: A *logaritmikus legkisebb négyzetek módszere* az $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{w}^{LLSM}(\mathbf{A})$ függvény, ahol a $\mathbf{w}^{LLSM}(\mathbf{A})$ súlyvektor a következő optimalizálási feladat megoldása:

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^n w_i = 1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\log a_{ij} - \log \left(\frac{w_i}{w_j} \right) \right]^2. \quad (1)$$

Az *LLSM*-et mértani közép módszernek is nevezik, mert (1) optimuma a sor-
elemek mértani közepeinek normalizálásával kapható:

$$w_i^{LLSM}(\mathbf{A}) = \frac{\prod_{j=1}^n a_{ij}^{1/n}}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^n a_{kj}^{1/n}}.$$

A súlyozási módszerek használata gyakran csak az alternatívák *rangsor*ának meghatározását célozza. A \succeq rangsor egy teljes ($i \succeq j$ vagy $i \preceq j$ minden $i, j \in N$ esetén) előrendezés, azaz reflexív ($i \succeq i$ minden $i \in N$ -re) és tranzitív (bármely $i, j, k \in N$ -re: $i \succeq j$ és $j \succeq k$ esetén $i \succeq k$) bináris reláció az alternatívák N halmazán.

A \succeq rangsor aszimmetrikus és szimmetrikus részeit \succ és \sim jelöli: $i \succ j$ akkor és csak akkor, ha $i \succeq j$ teljesül, de $j \not\succeq i$ nem; $i \sim j$ pedig pontosan akkor, ha $i \succeq j$ és $j \succeq i$.

Legyen \mathfrak{R}^n az n alternatíva összes lehetséges rangsorainak halmaza.

2.5. Definíció. *Rangsorolási módszer:* A $g : \mathcal{A}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ függvény egy *rangsorolási módszer*.

A rangsorolási módszer minden páros összehasonlítás mátrixhoz hozzárendeli az alternatívák egy rangsorát. A továbbiakban \succeq^g a g rangsorolási módszer \mathbf{A} páros összehasonlítás mátrixra történő alkalmazásának eredményét jelöli.

Világos, hogy minden súlyozási módszer egyértelműen meghatároz egy rangsorolási módszert. Például a \succeq^{LLSM} *logaritmikus legkisebb négyzetek rangsorolási módszer* esetén $i \succeq_{\mathbf{A}}^{LLSM} j$ akkor és csak akkor, ha $w_i^{LLSM}(\mathbf{A}) \geq w_j^{LLSM}(\mathbf{A})$. Egy rangsorolási módszer azonban több súlyozási módszer eredményeként is előállhat.

A társadalmi választások elméletében jól ismert rangsorolási módszer [11, 35] fogalmát [18] alkalmazta a páros összehasonlítás mátrixok tárgyalásában, bár korábban egyes szerzők implicit módon használták azt (lásd például [26, 34, 38, 44]).

3. A súlyozási módszerek karakterizációi

A páros összehasonlítás mátrixok súlyvektorának számítására természetesen már szintén többször alkalmazták az axiomatikus megközelítést. Valószínűleg az első ilyen munka [32] a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének karakterizálásáról. Az ehhez szükséges négy tulajdonság, a korrekt eredmény a konzisztens esetben (correct result in the consistent case), az összehasonlítás sorrendjére való invariancia (comparison order invariance), a simaság (smoothness) és a hatványozás invariancia (power invariance).¹ [33, Theorem 2] értelmében a hatványozás invariancia kicserélése a rangsor megőrzés (rank preservation) követelményre a [42, 43] által javasolt *sajátvektort módszert* karakterizálja.

Az axiómák közül az első kettő aligha vitatható. [8] azonban egy olyan célprogramozási módszert mutat, mely invariáns a hatványozásra is, és teljesíti a simaság egy szerintünk természetesebb, alternatív megfogalmazását (a deriválható függvények és folytonos deriváltak segítségével történő leírás helyett annak megkövetelése, hogy a mátrixelemek kis változása a súlyvektorban se eredményezhessen nagy változást), továbbá egy outlier megléte még nem akadályozza meg az eredeti preferenciavektor azonosítását. [13] egy újabb célprogramozási eljárást karakterizált.

A simaság és a hatványozás-invariancia akár teljes egészében elhagyható a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének axiomatizálásából. Ezeket [3] egy konzisztenciaszerű követelményre cseréli: a súlyvektornak ugyanannak kell lennie, ha több páros összehasonlítás mátrix aggregáltjából számítjuk, vagy a prioritásokat egyenként határozzuk meg az egyes mátrixokra, majd ezeket a mértani közép módszerrel összegezzük. [2] ezen axiómát és az összehasonlítás sorrendjére való invarianciát egyetlen tulajdonsággal helyettesíti, miszerint az alternatívák súlya csak a páros összehasonlítás mátrix megfelelő sorától függhet. [31]-hez hasonlóan ezt kissé mesterséges feltételnek tartjuk.

A fenti eredmények alapján a páros összehasonlítás mátrixokból származó súlyvektor meghatározásának problémája axiomatikus szempontból sem tűnik lezártnak. Jelen cikk ehhez a kérdéshez szeretne hozzájárulni a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének két karakterizációját bemutatva. Az első az eljárásra mint súlyozási módszerre vonatkozik, a két axióma közül az egyik szinte természetes elvárás, a másik pedig egyfajta lokális jól viselkedést követel meg. Miután az utóbbi nem feltétlenül vitathatatlan követelmény, ez az axiomatizáció inkább a módszer jobb megértését segítheti. A második karakterizációs eredmény az alternatívák logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével kapott rangsorára vonatkozik, miután a javasolt axiómák csak az alternatívák relatív viszonyát veszik figyelembe. Itt mindhárom tulajdonság jól indokolható, sőt, a bizonyításban központi szerepet játszó axióma a többszempontú döntésmélet Analytic Hierarchy Process (AHP)

¹ A korábbi karakterizációkban használt tulajdonságok közül csak azokat vezetjük be formálisan az 1. fejezetben, melyek jelen cikk szempontjából jelentőséggel bírnak.

módszerének „atyja”, Thomas L. Saaty egyik – Aczél Jánossal közös – nevezetes eredményén [1] alapul.

4. Axiómák

Ez a fejezet néhány súlyozási, illetve rangsorolási módszerrel szembeni követelményt ismertet.

4.1. Súlyozási módszerek tulajdonságai

4.1. Axióma. Korrektség (correctness, CR): Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{A}^{n \times n}$ egy konzisztens páros összehasonlítás mátrix. Az $f : \mathcal{A}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{R}^n$ súlyozási módszer *korrekt*, ha $f_i(\mathbf{A})/f_j(\mathbf{A}) = a_{ij}$ minden $1 \leq i, j \leq n$ -re.

A CR axióma megköveteli, hogy a súlyvektor minden konzisztens páros összehasonlítás mátrix esetén a mátrixot generáló vektor legyen. A tulajdonságot [32] vezette be *korrekt eredmény a konzisztens esetben* (correct result in the consistent case) néven, és többek között [2], [3], valamint [33] használta.

4.1. SEGÉDTÉTEL. A logaritmikus legkisebb négyzetek módszere teljesíti a CR axiómát.

4.1. Definíció. α -transzformáció egy triádon (α -transformation on a triad): Legyen $\mathbf{A} \in \mathcal{A}^{n \times n}$ egy páros összehasonlítás mátrix, $1 \leq i, j, k \leq n$ pedig három különböző alternatíva. Az (i, j, k) hármason (triádon) végrehajtott α -transzformáció eredménye az $\hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}^{n \times n}$ páros összehasonlítás mátrix, ahol $\hat{a}_{ij} = \alpha a_{ij}$ ($\hat{a}_{ji} = a_{ji}/\alpha$), $\hat{a}_{jk} = \alpha a_{jk}$ ($\hat{a}_{kj} = a_{kj}/\alpha$), $\hat{a}_{ki} = \alpha a_{ki}$ ($\hat{a}_{ik} = a_{ik}/\alpha$) és $\hat{a}_{\ell m} = a_{\ell m}$ minden más elemre.

A triádon végzett α -transzformáció három mátrixelemet módosít egy kör mentén. Az $\alpha = \sqrt[3]{a_{ik}/(a_{ij}a_{jk})}$ paraméterválasztással az i, j, k alternatívák vonatkozásában megteremthető a lokális konzisztencia, hiszen ekkor $\hat{a}_{ij}\hat{a}_{jk} = \alpha^2 a_{ij}a_{jk} = a_{ik}/\alpha = \hat{a}_{ik}$. Ugyanakkor ez a változtatás „elronthatja” más alternatívahármasok konzisztenciáját.

4.2. Axióma. α -transzformációtól való függetlenség egy triádon (invariance to α -transformation on a triad, ITT): Legyen $\mathbf{A}, \hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}^{n \times n}$ két páros összehasonlítás mátrix úgy, hogy $\hat{\mathbf{A}}$ megkapható az \mathbf{A} mátrix egy triádján végzett α -transzformációval. Az $f : \mathcal{A}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{R}^n$ súlyozási módszer *független a triádon végrehajtott α -transzformációra nézve*, ha $f(\mathbf{A}) = f(\hat{\mathbf{A}})$.

Az ITT axióma fennállásakor a súlyvektort nem befolyásolják a triádokon végzett α -transzformációk. A tulajdonság bevezetését [4] *körfüggetlenség* (independence of circuits) nevű axiómája inspirálta (magyar nyelven lásd [17]).

Az e transzformációtól való függetlenség megkövetelése az alábbi érveléssel indokolható. Tekintsünk egy sportversenyt, ahol i játékos legyőzte j -t, j legyőzte k -t, végül k legyőzte i -t, vagyis a három játékos „körbeverte” egymást. Legyen mindhárom győzelem és vereség egyenértékű. A játékosok rangsorát észszerűnek tűnik változatlanul hagyni, amennyiben a három mérkőzés eredményét ugyanolyan mértékben és irányban módosítjuk. Például mindegyiket az ellenkezőjére fordíthatjuk (azaz immár i ugyanolyan arányú vereséget szenved j -től, mint j játékos k -tól, k pedig i -től), vagy döntetlenre változtathatjuk azokat. Az *ITT* axióma lényegében ezen elvárás formalizálása.

4.2. Rangsorolási módszerek tulajdonságai

4.3. Axióma. Anonimitás (anonymity, *ANO*): Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{A}^{n \times n}$ egy páros összehasonlítás mátrix, $\sigma : N \rightarrow N$ az alternatívák halmazának egy permutációja, míg $\sigma(\mathbf{A}) = [\sigma(a)_{ij}] \in \mathcal{A}^{n \times n}$ az \mathbf{A} -ból ezen permutáció révén kapható páros összehasonlítás mátrix, azaz $\sigma(a)_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}$. A $g : \mathcal{A}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ rangsorolási módszer *anonim*, ha $i \succeq_{\mathbf{A}}^g j \iff \sigma(i) \succeq_{\sigma(\mathbf{A})}^g \sigma(j)$ minden $1 \leq i, j \leq n$ -re.

Az anonimitás értelmében az alternatívák rangsora nem függhet azok elnevezésétől. Ezt a tulajdonságot – súlyozási módszerek esetén – [32] az *összehasonlítás sorrendjére való invariancia* (comparison order invariance) néven vezette be.

4.2. Definíció. Páros összehasonlítás mátrixok aggregálása (aggregation of pairwise comparison matrices): Legyenek

$$\mathbf{A}^{(1)} = [a_{ij}^{(1)}] \in \mathcal{A}^{n \times n}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = [a_{ij}^{(2)}] \in \mathcal{A}^{n \times n}, \dots, \mathbf{A}^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}] \in \mathcal{A}^{n \times n}$$

páros összehasonlítás mátrixok. Az ezekből képzett *aggregált* páros összehasonlítás mátrix a következő:

$$\mathbf{A}^{(1)} \oplus \mathbf{A}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathbf{A}^{(k)} = \left[\sqrt[k]{a_{ij}^{(1)} a_{ij}^{(2)} \dots a_{ij}^{(k)}} \right] \in \mathcal{A}^{n \times n}.$$

Tehát páros összehasonlítás mátrixok aggregálása az azonos pozíciójú mátrixelemek mértani közepei által meghatározott páros összehasonlítás mátrixhoz vezet. [1] axiomatikus érveléssel bizonyítja, hogy a mértani közép az egyetlen „jól viselkedő” aggregáló módszer, mert nem létezik más olyan kváziaritmetikai közép, mely teljesítené a reciprocitás és a pozitív homogenitás követelményét. A reciprocitás értelmében a mátrixelemek összegzése, majd invertálása ugyanazt az eredményt adja, mint az egyenkénti invertálás, és az ezt követő aggregálás. Ez a tulajdonság garantálja az aggregált mátrix páros összehasonlítás mátrix voltát (2.1. definíció). A pozitív homogenitás szerint pedig az összegzendő mátrixelemek mindegyikének

ugyanazon pozitív konstanssal történő megszorozása az aggregált mátrix megfelelő elemét is ezzel arányosan változtatja meg.

4.4. Axióma. Aggregálás invariancia (aggregation invariance, *AI*): Legyenek $\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(k)} \in \mathcal{A}^{n \times n}$ páros összehasonlítás mátrixok, $g : \mathcal{A}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ pedig egy olyan rangsorolási módszer, hogy $i \succeq_{\mathbf{A}^{(\ell)}}^g j$ minden $1 \leq \ell \leq k$ -re. Ekkor g aggregálás invariáns, ha $i \succeq_{\mathbf{A}^{(1)} \oplus \mathbf{A}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathbf{A}^{(k)}}^g j$, valamint $i \succ_{\mathbf{A}^{(1)} \oplus \mathbf{A}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathbf{A}^{(k)}}^g j$, amennyiben $i \succ_{\mathbf{A}^{(\ell)}}^g j$ legalább egy $1 \leq \ell \leq k$ esetén.

A Pareto-elvnek is nevezett, ebben a formában [21] által javasolt *AI* axióma a csoportos döntéshozatal kézenfekvő feltétele: amikor a döntéshozók egyetértenek abban, hogy az i alternatíva nem rosszabb j -nél, akkor ezt a relációt – az egyéni vélemények összegzésével kapott – aggregált preferenciáknak is tükröznie kell.

4.5. Axióma. Reszponzivitás (responsiveness, *RES*): Legyenek $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in \mathcal{A}^{n \times n}$ páros összehasonlítás mátrixok, míg $1 \leq i, j \leq n$ két különböző alternatíva úgy, hogy \mathbf{A} és \mathbf{A}' minden eleme azonos $a'_{ij} > a_{ij}$ ($a'_{ji} < a_{ji}$) kivételével. A

$$g : \mathcal{A}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{R}^n$$

rangsorolási módszer *reszponzív*, ha $i \succeq_{\mathbf{A}}^g j \Rightarrow i \succ_{\mathbf{A}'}^g j$.

A *reszponzivitás* – egy természetesnek tűnő monotonitási tulajdonság – értelmében, amennyiben az i alternatíva nem rosszabb j -nél, akkor szigorúan preferálttá kell válnia, miután egymással szembeni páros összehasonlításuk eredménye i számára kedvezően változik.

5. Axiomatizációk

Az alábbiakban a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerét karakterizáljuk.

5.1. Az *LLSM* mint súlyozási módszer

Az 1. fejezetben bemutatott, súlyozási módszerekre vonatkozó két tulajdonság már elegendő egy eljárás egyértelmű meghatározásához.

5.1. TÉTEL. *A logaritmikus legkisebb négyzetek módszere az egyetlen korrekt és egy triádon végrehajtott α -transzformációra nézve független súlyozási módszer.*

Bizonyítás. Lásd [25, Theorem 4.1]. □

Miután az 5.1. tétel karakterizációja csak két tulajdonságot használ, inkább technikai jelentőségű az alábbi eredmény.

5.1. SEGÉDTÉTEL. *CR és ITT logikailag független axiómák.*

Bizonyítás. Lásd [25, Proposition 4.1]. □

Az 5.1. tétel fő üzenete, hogy a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere egy-szerre rendelkezik jó lokális (*ITT*) és globális (*CR*) tulajdonságokkal. Ez az egyetlen olyan eljárás, amely nem „romlik el” akkor, ha a páros összehasonlítás mátrix vágyott konzisztenciáját „mohó” módon, mindig csak egy-egy alternatívahármasra összpontosítva szeretnénk helyreállítani, miközben nem engedjük meg a súlyvektor változását. Ez azért lehet némileg meglepő, ugyanakkor egyértelműen kedvező eredmény, mert első látásra egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy a konzisztencia lokális helyreállítása, egy-egy triád „kijavítása” ne súlyosbítaná helyrehozhatatlanul a mátrix többi részén meglevő inkonzisztenciát (vagy rontaná el a kezdetben meglevő konzisztenciát). Ilyen értelemben az *LLSM* eljárással kapott súlyvektor nevezhető a triádon végzett α -transzformáció fixpontjának.

Az 5.1. tétel szerint, ha valaki nem ért egyet a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének használatával, akkor a *CR* és *ITT* axiómák közül legalább az egyiket el kell utasítania. A korrektség elhagyása nehezen védhető. A triádon végrehajtott α -transzformációtól való függetlenségről adott esetben le lehet mondani, bár ezzel elveszítjük a fenti egyszerű iteratív eljárás alkalmazhatóságát.

5.2. Az *LLSM* mint rangsorolási módszer

A 1 fejezetben ismertetett három tulajdonság segítségével karakterizálható egy rangsorolási módszer.

5.2. TÉTEL. *A logaritmikus legkisebb négyzetek rangsorolási módszere az egyetlen anonim, aggregálásinvariáns és rezponzív rangsorolási módszer.*

Bizonyítás. Lásd [21, Theorem 1]. □

A tételben szereplő tulajdonságok egyike sem nélkülözhető.

5.2. SEGÉDTÉTEL. *ANO, AI és RES logikailag független axiómák.*

Bizonyítás. Lásd [21, Proposition 3]. □

Az 5.2. tétel alapján az *LLSM* eljárás elvetéséhez az *ANO*, *AI* és *RES* tulajdonságok valamelyikét fel kell áldozni. Az anonimitás elhagyása megmagyarázhatatlan. Az aggregálás invariancia alapja [1] híres eredménye.² Végül, a rezponzivitás feladása ellentmond a páros összehasonlítás mátrix elemeinek tulajdonított jelentésnek. Minden bizonnyal bármelyik vállalati döntéshozó rövid úton elbocsátaná azt a pénzügyi tanácsadóját, aki megpróbálná megmagyarázni, hogy azért kell kevesebb pénzt szánni egy projektre, mert annak relatív hozama (változatlan piaci körülmények, például azonos kockázat mellett) váratlanul nagyobb lett.

² A hivatkozott cikk 2019. február 27-én 921 hivatkozással rendelkezett a Google Scholar, és 370-nel a Web of Science összesítése alapján.

6. Összefoglalás

Az előzőekben a páros összehasonlítás mátrixok súlyvektorának meghatározására szolgáló egyik eljárás, a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével kapcsolatos két karakterizációt ismertettünk. Mindegyik hatásos érvekkel szolgál az *LLSM* eljárás alkalmazása mellett, mely az itt tárgyaltakon túl számos kedvező tulajdonsággal rendelkezik (lásd például [2, 3, 31, 32, 33, 37]).

Ugyanakkor fontos felhívni a figyelmet arra, hogy a bemutatott axiomatizációk csak az összes páros összehasonlítás mátrix halmazán érvényesek. Első ránézésre ennél szűkebb osztályok választása nem jelenthet gondot, ez azonban tévedés [40]: két, egyébként különböző súlyozási vagy rangsorolási eljárás egy kisebb halmazon már egybeeshet, így ott nem feltétlenül az *LLSM* lesz az *egyetlen* olyan módszer, ami az összes axiómát teljesíti. Például konzisztens páros összehasonlítás mátrixok esetén az *ITT* axióma triviális módon teljesül, vagyis minden korrekt súlyozási módszer azonos a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével, így az 5.1. tétel állításának egyértelműségre vonatkozó része hamis.

Talán érdekesebb kérdés, vajon mi a helyzet egy bővebb halmazon, a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokén, ahol bizonyos összehasonlítások ismeretlenek is lehetnek. A célfüggvény okán a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere minden nehézség nélkül kiterjeszthető erre az osztályra [6], miközben az eljárás bizonyos tulajdonságai érvényesek maradnak [7]. Ez az általánosítás azonban már egy másik kutatás témája lehet.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönettel tartozik *Denis Bouyssounak* az első karakterizációhoz nyújtott inspirációért, *Bozóki Sándornak* a páros összehasonlítás mátrixok, *Pintér Miklósnak* pedig az axiomatikus tárgyalás megismertetéséért, valamint a Budapesti Corvinus Egyetem 2017. március 17-i játékelméleti szemináriuma résztvevőinek az ott elhangzott értékes megjegyzésekért.

A kutatást a K 111797 számú OTKA pályázat és az MTA Prémium posztdoktori kutatói program támogatta.

Hivatkozások

- [1] ACZÉL, J. AND SAATY, T. L.: *Procedures for synthesizing ratio judgements*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **27** No. **1**, pp. 93-102 (1983).
- [2] BARZILAI, J.: *Deriving weights from pairwise comparison matrices*, Journal of the Operational Research Society, Vol. **48** No. **12**, pp. 1226-1232 (1997).

- [3] BARZILAI, J., COOK, W. D., AND GOLANY, B.: *Consistent weights for judgements matrices of the relative importance of alternatives*, Operations Research Letters, Vol. **6** No. **3**, pp. 131-134 (1987).
- [4] BOUYSSOU, D.: *Ranking methods based on valued preference relations: A characterization of the net flow method*, European Journal of Operational Research, Vol. **60** No. **1**, pp. 61-67 (1992).
- [5] BOZÓKI, S., CSATÓ, L., AND TEMESI, J.: *An application of incomplete pairwise comparison matrices for ranking top tennis players*, European Journal of Operational Research, Vol. **248** No. **1**, pp. 211-218 (2016).
- [6] BOZÓKI, S., FÜLÖP, J., AND RÓNYAI, L.: *On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. **52** No. **1-2**, pp. 318-333 (2010).
- [7] BOZÓKI, S. AND TSYGANOK, V.: *The (logarithmic) least squares optimality of the arithmetic (geometric) mean of weight vectors calculated from all spanning trees for incomplete additive (multiplicative) pairwise comparison matrices*, International Journal of General Systems, Vol. **48** No. **4**, pp. 362-381 (2019).
- [8] BRYSON, N.: *A goal programming method for generating priority vectors*, Journal of the Operational Research Society, Vol. **46** No. **5**, pp. 641-648 (1995).
- [9] CAN, B. AND STORCKEN, T.: *A re-characterization of the Kemeny distance*, Techn. Ber. RM/13/009, Maastricht University School of Business and Economics, Graduate School of Business and Economics (2013).
- [10] CHAO, X., KOU, G., LI, T., AND PENG, Y.: *Jie Ke versus AlphaGo: A ranking approach using decision making method for large-scale data with incomplete information*, European Journal of Operational Research, Vol. **265** No. **1**, pp. 239-247 (2018).
- [11] CHEBOTAREV, P. YU. AND SHAMIS, E.: *Characterizations of scoring methods for preference aggregation*, Annals of Operations Research, Vol. **80**, pp. 299-332 (1998).
- [12] CHOO, E. U. AND WEDLEY, W. C.: *A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices*, Computers & Operations Research, Vol. **31** No. **6**, pp. 893-908 (2004).
- [13] COOK, W. D. AND KRESS, M.: *Deriving weights from pairwise comparison ratio matrices: An axiomatic approach*, European Journal of Operational Research, Vol. **37** No. **3**, pp. 355-362 (1988).
- [14] CRAWFORD, G. AND WILLIAMS, C.: *Analysis of subjective judgment matrices*, Interim report R-2572-AF, Rand Corporation, Santa Monica (1980).
- [15] CRAWFORD, G. AND WILLIAMS, C.: *A note on the analysis of subjective judgment matrices*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **29** No. **4**, pp. 387-405 (1985).
- [16] CSATÓ, L.: *Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **21** No. **4**, pp. 783-803 (2013).
- [17] CSATÓ, L.: *A páros összehasonlításokon alapuló rangsorolás módszertani és alkalmazási kérdései*, Dissertation, Corvinus University of Budapest (2015).
- [18] CSATÓ, L.: *Eigenvector Method and rank reversal in group decision making revisited*, Fundamenta Informaticae, Vol. **156** No. **2**, pp. 169-178 (2017).

- [19] CSATÓ, L.: *On the ranking of a Swiss system chess team tournament*, Annals of Operations Research, Vol. **254** No. **1-2**, pp. 17-36 (2017).
- [20] CSATÓ, L.: *Characterization of an inconsistency ranking for pairwise comparison matrices*, Annals of Operations Research, Vol. **261** No. **1-2**, pp. 155-165 (2018).
- [21] CSATÓ, L.: *Characterization of the row geometric mean ranking with a group consensus axiom*, Group Decision and Negotiation, Vol. **27** No. **6**, pp. 1011-1027 (2018).
- [22] CSATÓ, L.: *An impossibility theorem for paired comparisons*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **27** No. **2**, pp. 497-514 (2019).
- [23] CSATÓ, L.: *Some impossibilities of ranking in generalized tournaments*, International Game Theory Review, Vol. **21** No. **1**, 1940002 (2019).
- [24] CSATÓ, L.: *Axiomatizations of inconsistency indices for triads* (2019), kézirat. arXiv: 1801.03355.
- [25] CSATÓ, L.: *A characterization of the Logarithmic Least Squares Method*, European Journal of Operational Research, Vol. **276** No. **1**, pp. 212-216 (2019).
- [26] CSATÓ, L. AND RÓNYAI, L.: *Incomplete pairwise comparison matrices and weighting methods*, Fundamenta Informaticae, Vol. **144** No. **3-4**, pp. 309-320 (2016).
- [27] CSÓKA, P.: *Az arányos csődszabály karakterizációja körbetartozások esetén*, Közgazdasági Szemle, Vol. **LXIV** No. **8**, pp. 930-942 (2017).
- [28] CSÓKA, P. AND PINTÉR, M.: *On the impossibility of fair risk allocation*, The BE Journal of Theoretical Economics, Vol. **16** No. **1**, pp. 143-158 (2016).
- [29] DE GRAAN, J. G.: *Extensions of the multiple criteria analysis method of T. L. Saaty*, Report, National Institute for Water Supply, Voorburg (1980).
- [30] DE JONG, P.: *A statistical approach to Saaty's scaling method for priorities*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **28** No. **4**, pp. 467-478 (1984).
- [31] DIJKSTRA, T. K.: *On the extraction of weights from pairwise comparison matrices*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **21** No. **1**, pp. 103-123 (2013).
- [32] FICHTNER, J.: *Some thoughts about the mathematics of the Analytic Hierarchy Process*, Techn. Ber., Institut für Angewandte Systemforschung und Operations Research, Universität der Bundeswehr München (1984).
- [33] FICHTNER, J.: *On deriving priority vectors from matrices of pairwise comparisons*, Socio-Economic Planning Sciences, Vol. **20** No. **6**, pp. 341-345 (1986).
- [34] GENEST, C., LAPOINTE, F., AND DRURY, S. W.: *On a proposal of Jensen for the analysis of ordinal pairwise preferences using Saaty's eigenvector scaling method*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **37** No. **4**, pp. 575-610 (1993).
- [35] GONZÁLEZ-DÍAZ, J., HENDRICKX, R., AND LOHMANN, E.: *Paired comparisons analysis: an axiomatic approach to ranking methods*, Social Choice and Welfare, Vol. **42** No. **1**, pp. 139-169 (2014).
- [36] KEMENY, J. G. AND SNELL, L. J.: *Preference ranking: an axiomatic approach*, in: *Mathematical Models in the Social Sciences*, pp. 9-23, Ginn, New York (1962).

- [37] LUNDY, M., SIRAJ, S., AND GRECO, S.: *The mathematical equivalence of the "spanning tree" and row geometric mean preference vectors and its implications for preference analysis*, European Journal of Operational Research, Vol. **257** No. **1**, pp. 197-208 (2017).
- [38] PÉREZ, J. AND MOKOTOFF, E.: *Eigenvector priority function causes strong rank reversal in group decision making*, Fundamenta Informaticae, Vol. **144** No. **3-4**, pp. 255-261 (2016).
- [39] PETRÓCZY, D. G.: *Egy életminőség-rangsor a hazautalások alapján*, in: *XV. Gazdaságmodellezési Szakértői Konferencia - Előadások*, pp. 97-106, Gazdaságmodellezési Társaság, Budapest (2018).
- [40] PINTÉR, M.: *A Shapley-érték axiomatizálása*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **26** No. **3**, pp. 289-315 (2009).
- [41] RABINOWITZ, G.: *Some comments on measuring world influence*, Conflict Management and Peace Science, Vol. **2** No. **1**, pp. 49-55 (1976).
- [42] SAATY, T. L.: *A scaling method for priorities in hierarchical structures*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **15** No. **3**, pp. 234-281 (1977).
- [43] SAATY, T. L.: *The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation*, McGraw-Hill, New York (1980).
- [44] SAATY, T. L. AND VARGAS, L. G.: *Inconsistency and rank preservation*, Journal of Mathematical Psychology, Vol. **28** No. **2**, pp. 205-214 (1984).
- [45] SZIKLAI, B.: *How to identify experts in a community?*, International Journal of Game Theory, Vol. **47** No. **1**, pp. 155-173 (2018).
- [46] VAN DEN BRINK, R. AND PINTÉR, M.: *On axiomatizations of the Shapley value for assignment games*, Journal of Mathematical Economics, Vol. **60**, pp. 110-114 (2015).



Csató László 1987-ben született. A Budapesti Corvinus Egyetem gazdaságelemzés BSc (2009) és gazdaság-matematikai elemző MSc (2011) szakán végzett. PhD fokozatát a Budapesti Corvinus Egyetemen szerezte 2015-ben, Fülöp János és Temesi József témavezetésével. Elismerései: BCE Kutatási Kiválósági Díj (2016), MTA Prémium posztdoktori kutatói program (2016-2019), Farkas Gyula-emlékdíj (2018). 2011 óta oktat a BCE Operációkutatás és Aktuáriustudományok tanszékén, 2017-től egyetemi adjunktusként, emellett 2016 óta az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési rendszerek Kutatócsoportjának tudományos munkatársa. Fő kutatási területei a döntésselmélet, a játékelmélet és az operációkutatás a

sportban. 14 angol nyelvű, köztük 13 impakt faktoros cikket publikált, ebből 12-t önállóan.

Magyar Tudományos Akadémia
Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet
1111 Budapest, Kende utca 13-17.
csato.laszlo@sztaki.mta.hu

Budapesti Corvinus Egyetem
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 13-15.
laszlo.csato@uni-corvinus.hu

CHARACTERIZATIONS OF THE LOGARITHMIC LEAST SQUARES METHOD

LÁSZLÓ CSATÓ

An axiomatic approach is applied for the problem of extracting weights or rankings of the alternatives from a pairwise comparison ratio matrix. First, we provide an axiomatic characterization of the Logarithmic Least Squares Method, which is sometimes called row geometric mean. This procedure is shown to be the only one satisfying correctness in the consistent case, which requires the reproduction of the inducing vector for any consistent matrix, and invariance to a specific transformation on a triad, that is, the weight vector is not influenced by an arbitrary multiplication of matrix elements along a 3-cycle by a positive scalar. Second, it is proved that the ordering induced by this method is uniquely determined by three independent axioms, anonymity (independence of the labelling of alternatives), responsiveness (a kind of monotonicity property) and aggregation invariance, which demands the preservation of the pairwise ranking between two alternatives if unanimous individual preferences are combined by geometric mean.

Keywords: decision analysis; pairwise comparisons; ranking; geometric mean; axiomatic approach; characterization.

Mathematics Subject Classification (2000): 90B50, 91B08.

MEGJEGYZÉS AZ ÖKOLÓGIAI LÁBNYOM INPUT-OUTPUT MODELLEL VALÓ SZÁMÍTÁSÁHOZ

DOBOS IMRE¹

Az ökológiai, valamint a kapcsolódó lábnyomok számítása egyre népszerűbb a környezet- és/vagy ökológiai közgazdaságtan művelői számára. A dolgozat a számítások egy új módszerét vizsgálja; nevezetesen azt a módszertant, amely a Leontief által kifejlesztett input-output modellt használja a lábnyomok számításához. A dolgozat a statikus ökológiai lábnyom input-output modellel történő meghatározásának irodalmát bemutatva egy új módszert javasolt annak kiszámításához. A továbbfejlesztett módszertan lehetőséget nyújt további lábnyomok számításához is, mint a karbon-, vagy vízlábnyom meghatározása.

Keywords: input-output modell, ökológiai lábnyom, környezet-gazdaságtan

1. Bevezetés

A lábnyomok, mindenekelőtt az ökológiai lábnyom meghatározása a 90-es évek elejére nyúlik vissza (Rees [5], Wackernagel és Rees [6]). Ezen vizsgálatok célja annak meghatározása, hogy az egyes nemzetgazdaságok mekkora földterületet használnak fel az ország területén élő népesség szükségleteinek kielégítéséhez. Az ágazati kapcsolatok mérlege (ÁKM), vagyis a Leontief-féle input-output modell jó lehetőséget nyújt az ilyen számítások elvégzéséhez (Leontief [3], Miller és Blair [4], Zalai [7]). A lineáris modellek, mint az input-output modell, nagyfokú rugalmassága és könnyen alkalmazhatósága miatt a környezeti, ökológiai és regionális közgazdaságtanokban széles alkalmazásra talál.

Jelen dolgozatban két, az irodalomban és alkalmazásban népszerű modellt mutatunk be. Mindkettő az ökológiai lábnyom számítását szemlélteti input-output modellel. Bicknell et al. vizsgálták először az ökológiai lábnyomot input-output modellel. A modell alkalmazásához a földterületeket fel kell bontani arra, hogy az külföldről származik-e az importon keresztül, vagy a belső termeléshez szükséges-e. Ez az oldal tekinthető a „kínálati” oldalnak. A másik oldal, nevezhetjük „keresleti” oldalnak, a földterületek fogyasztáshoz rendelhető részét reprezentálja. Mivel a

¹A szerző köszöni az OTKA K 116472 támogatását.

világ nemzetgazdaságainak többsége nyitott gazdaság, ezért ezen összefüggéseket árnyalja az, hogy mindez exportra kerül-e, vagy importból származik. Bicknell et al. [1] dolgozatukban egy zárt gazdaság keretei között kezdik az elemzésüket, és a végső fogyasztás földterület igényét határozzák meg először. Ezt követően tesszik nyílttá az input-output modelljüket az export és import számbavételével. Az import számbavételénél három területtípust különítenek el: (1) az a földterület, amely az importon keresztül *közvetlenül* a végső fogyasztásba kerül, (2) az a földterület, amely a termelésbe kerül, és csak *közvetetten* kerül a fogyasztóhoz, és (3) az importból *közvetetten* az exportba kerülő földterület. Számítási módszerüket egy 3×3 -as gazdaság mintaszámain demonstrálják, amit mi is használni fogunk. A konkrét számításokat mátrixformában a következő részekben mutatjuk be.

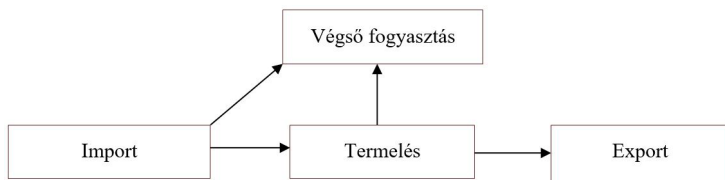
Ferng [2] dolgozatában nagyban építkezik Bicknell et al. [1] munkájára, de a számítások elvégzéséhez „földszorzó” (land multiplier) bevezetését javasolja. A számításai eredménye lényegében megegyezik az előbb idézett munkával. Ami sokkal lényegesebb különbség, az a földterület importban megtestesülő része. Ezen a ponton Ferng [2] dolgozata lényegesebb eltérést mutat.

Dolgozatunkban ismertetjük az előbbi két hozzájárulást matematikai szempontból, és néhány ponton korrigáljuk a dolgozatokban meglévő hibákat. A cikk további része a következőképpen alakul. A második fejezetben ismertetjük Bicknell et al. számpéldáját, amin Ferng is bemutatta kutatásai eredményeit. A harmadik részben rámutatunk a korábbi elemzések hiányosságaira és egy új számítási módszert javasolunk. Végül összegezzük vizsgálataink eredményeit.

2. Bicknell et al. számpéldája: elsődleges erőforrás szemlélet

Az alapadatokat, amelyekből az ismertetett dolgozatok kiindultak, az 1. táblázat mutatja. A táblázat elemei pénzegységben értendők.

Az input-output modell a következő ábrán szereplő módon értelmezhető:



1. ábra. Az input-output modell anyagáramlási ábrája

Az 1. ábrán látható, hogy az import termékeket közvetlenül fel lehet használni a termelésben és a fogyasztásban is. A bemutatandó két dolgozat is ezeket az anyagáramlási folyamatokat állítja a vizsgálatai középpontjába.

Tekintsük először Bicknell et al. [1] munkáját. Elemzésüket azzal kezdik, hogy

	Mező- gazdaság	Ipar	Kereske- delem	Végső fogyasztás	Export	Teljes kibocsátás
Mezőgazdaság	45	15	8	55	25	148
Ipar	23	30	42	25	20	140
Kereskedelem	15	25	10	40	5	95
Hozzáadott érték	45	55	30	20		
Mezőgazdasági import	5	5	0	7		
Ipari import	15	8	5	3		
Kereskedelmi import	0	2	0	0		
Teljes kibocsátás	148	140	95			
Földterület (ha)	14 000	2000	100			

1. táblázat. A 3×3 -as mintagazdaság input-output táblája.

meghatározzák az input-output modell technológiai együtthatóit. Az együtthatókat a következőképpen számolhatjuk ki:

$$A = \begin{bmatrix} 45 & 15 & 8 \\ 23 & 30 & 42 \\ 15 & 25 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 148 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 95 \end{bmatrix}^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0,304 & 0,107 & 0,084 \\ 0,155 & 0,214 & 0,422 \\ 0,101 & 0,179 & 0,105 \end{bmatrix},$$

vagyis a bruttó kibocsátás vektorával elosztjuk a közvetlen felhasználás mátrixának oszlopait. Az A mátrix Leontief-inverzét könnyen kiszámíthatjuk:

$$(I - A)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1,539 & 0,273 & 0,280 \\ 0,453 & 1,514 & 0,791 \\ 0,264 & 0,333 & 1,307 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk most meg a modell import technológiai együtthatóit:

$$A_{imp} = X_{imp} \langle x \rangle^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 15 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 148 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 95 \end{bmatrix}^{-1} \approx$$

$$\begin{bmatrix} 0,034 & 0,036 & 0 \\ 0,101 & 0,057 & 0,053 \\ 0 & 0,014 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ugyanezzel a módszerrel kiszámítható a földegyüttható is:

$$l = L\langle x \rangle^{-1} \begin{bmatrix} 14 & 000 & 2000 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 148 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 95 \end{bmatrix}^{-1} \approx \begin{bmatrix} 94,59 & 14,29 & 1,05 \end{bmatrix}$$

ami azt mutatja, hogy egységni kibocsátásnak mekkora a földterület igénye az adott nemzetgazdaságban. Ennek figyelembevételével a *végső fogyasztás terület-igénye* nem más, mint

$$l(l - A)^{-1} \langle c \rangle \approx \begin{bmatrix} 94,59 & 14,29 & 1,05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,539 & 0,273 & 0,280 \\ 0,453 & 1,514 & 0,791 \\ 0,264 & 0,333 & 1,307 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8377,02 & 1196,25 & 1566,2 \end{bmatrix},$$

ahol a c vektor a végső fogyasztást tartalmazza. Tehát ez az a földterületnagyság, ami a közvetlen fogyasztáshoz szükséges a gazdaságban. Ezt interpretálhatjuk úgy is, mint a zárt gazdaság földterület igényét, amint azt Bicknell et al. [1] is értelmezte. Ha az 1. ábrát tekintjük, akkor ez mutatja a termelésből a fogyasztás felé mutató nyilat.

Vizsgáljuk most az importtartalmakat a nyílt gazdaságban. Ezt a szerzők három lépésben teszik meg. Először a *végső fogyasztáshoz közvetlenül felhasznált importot* számították ki:

$$l(l - A)^{-1} \langle c_{imp} \rangle \approx \begin{bmatrix} 94,59 & 14,29 & 1,05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,539 & 0,273 & 0,280 \\ 0,453 & 1,514 & 0,791 \\ 0,264 & 0,333 & 1,307 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1066,27 & 143,55 & 0 \end{bmatrix},$$

ahol a c_{imp} vektor a végső fogyasztáshoz közvetlenül beszerzett importot tartalmazza. Az 1. ábrában ezt az importból közvetlenül a fogyasztáshoz mutató nyíllal demonstrálhatjuk.

A következő kategória azon földterületet mutatja, amely az *importból közvetlenül a termelésbe* irányul, vagyis az 1. ábra nyilai közül az importból a termelésbe

mutatót kívánjuk kiszámítani:

$$l(l-A)^{-1}A_{imp}\langle x\rangle\approx$$

$$\begin{bmatrix} 94,59 & 14,29 & 1,05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,539 & 0,273 & 0,280 \\ 0,453 & 1,514 & 0,791 \\ 0,264 & 0,333 & 1,307 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 15 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1479,3 & 1222,66 & 239,25 \end{bmatrix},$$

ahol a szektorok importtartalma az 1. táblázatból is leolvasható. Végül az *export földtartalmát* kell kiszámítani, mivel az exportot nem az adott nemzetgazdaságban használják fel. Ezt a szerzők egy szorzóval oldották meg. Ez a szorzó azt mutatja az értelmezésükben, hogy a végső felhasználásból egy adott szektorban mennyi kerül a végső fogyasztásra, kisebbitve azt az exporttal. Formalizáltan:

$$l(l-A)^{-1}A_{imp}\langle x\rangle\langle c\rangle\langle c+exp^{-1}\rangle$$

$$\begin{bmatrix} 1479,3 & 1222,66 & 239,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{55}{80} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{40}{45} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1017,02 & 679,26 & 212,67 \end{bmatrix},$$

ahol *exp* vektorral jelöljük a végső felhasználásban szereplő exportot ágazonként.

A három tényezőből (a végső fogyasztás, a fogyasztáshoz közvetlenül importált termékek és az ágazatok termeléséhez felhasznált import földigénye) megállapítható a gazdaság ökológiai lábnyoma, amit a következő táblázatban mutathatunk be:

	Hazai föld	Importált föld	Ökológiai lábnyom
Mezőgazdaság	8377,02	2083,19	10 460,21
Ipar	1196,25	822,81	2019,06
Kereskedelem	1566,2	212,67	1778,87
Összesen:	11 139,47 (78,13%)	3118,67 (21,87%)	14 258,14

2. táblázat. Bicknell et al. számításainak összefoglaló táblázata.

A táblázatban az importált földet a közvetlenül a végső fogyasztásként importált áruk és a termelésből a végső fogyasztáshoz került áruk felhasználásaként definiálták a szerzők.

A dolgozattal kapcsolatban három fontos ponton lehet kritikával élni. Az első kritikai pontot már a szerzők is jelezték a dolgozatukban. Az import föld megállapításánál a szerzők nem vették figyelembe, hogy az importált áruk és szolgáltatások különböző országokból származhatnak, ahol a technológiai együttthatók mások és mások. Ezen megkülönböztetés helyett az adott gazdaság együttthatóival számolnak a szerzők, elismerve azt, hogy ez csak egy közelítés.

A másik kritikai pontot Ferng fogalmazta meg azzal, hogy a földszorzókat más-hogyan kellene számolni, a földterület használatát már a Leontief-inverzbe be kellene építeni, hogy azzal az aggregálási problémát kiküszöböljük, amint arra a szerző rámutat. Dolgozatában új megragadási módszert javasolt, amit a következő fejezetben mutatunk be.

A harmadik kritikai pont az export kiküszöbölését illeti. Ilyen módszerrel az export importanyag tartalma nem mutatható ki, amire megoldást később mutatunk be a modell általánosításával.

3. Ferng módszere az ökológiai lábnyom kiszámítására: felhasználási szemlélet

A Ferng által javasolt módszer bemutatásánál támaszkodunk az 1. táblázat adataira, azonban szerepeltessük a földterület igényt a felső szárnyon, és nem az alsón. Ezzel a módszerrel a következő, 3. táblázatot kaphatjuk.

	Mezőgazdaság	Ipar	Kereskedelem	Végső fogyasztás	Export	Teljes kibocsátás	Földterület (ha)
Mezőgazdaság	45	15	8	55	25	148	14 000
Ipar	23	30	42	25	20	140	2000
Kereskedelem	15	25	10	40	5	95	100
Hozzáadott érték	45	55	30	20			
Mezőgazdasági import	5	5	0	7			
Ipari import	15	8	5	3			
Kereskedelmi import	0	2	0	0			
Teljes kibocsátás	148	140	95				

3. táblázat. A 3×3 -as gazdaság input-output táblája.

Az ilyen felfogásban a földterületet nem elsődleges erőforrásnak tekintjük modellezési szempontból, hanem felhasználásnak, amit naturáliában, esetünkben hektárban mérünk. Ezzel a szemlélettel minden adott szektor kibocsátási és felhasználási értékét megállapíthatjuk a földterület nagyságával is. Ez az az ötlet, amellyel

Ferng megalkotta az ismertetésre kerülő földszorzóját.

A földszorzó mátrix itt azt mutatja, hogy egységnyi kibocsátáshoz mekkora közvetlen és közvetett földterület szükséges. A mátrixot az előbbi adatokra alapozva:

$$\langle l \rangle (I - A)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 145,55 & 25,87 & 26,48 \\ 6,48 & 21,63 & 11,30 \\ 0,28 & 0,35 & 1,38 \end{bmatrix}.$$

A következőkben nagyjából hasonlóan veszi végig a szerző a földterület igényeket, azonban más értékekre.

Az első, és talán legfontosabb földigénye a *végso fogyasztásnak* van. Ezt ebben a szemléletben az alábbi módon számolhatjuk:

$$\langle l \rangle (I - A)^{-1} c \approx \begin{bmatrix} 145,55 & 25,87 & 26,48 \\ 6,48 & 21,63 & 11,30 \\ 0,28 & 0,35 & 1,38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55 \\ 25 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9711,40 \\ 1348,95 \\ 79,14 \end{bmatrix}.$$

Amint látjuk, ez csak abban tér el a Bicknell et al. [1] dolgozatában adottaktól, hogy a földterület igény és végso fogyasztás vektorait szerepükben felcseréltük mátrixaritmetikai szempontból: itt a földigény vektor veszi át a fogyasztástól a diagonális mátrix szerepét, és fordítva.

A második elem a hazai termelésen belül az *exportra előállított termékek és szolgáltatások földigénye*. Ezt az előbbiekhöz hasonlóan határozhatjuk meg:

$$\langle l \rangle (I - A)^{-1} exp \approx \begin{bmatrix} 145,55 & 25,87 & 26,48 \\ 6,48 & 21,63 & 11,30 \\ 0,28 & 0,35 & 1,38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55 \\ 25 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4288,6 \\ 651,05 \\ 20,86 \end{bmatrix}.$$

Ezzel a két elemmel a haza termelő szektor kibocsátása végso felhasználásának területigényét kiszámítottuk. Térjünk most rá az importált termékek földigényének megragadásához. Amint a másik módszert, úgy ezt is kritizálhatjuk azzal, hogy az adott nemzetgazdaság földszorzóját használjuk az importra is. Később megmutatjuk, hogy mátrixaritmetikai szempontból a probléma kezelhető lehet, de az annyi információ tárolását és feldolgozását jelentené, amivel a nyert tudástöbblet nem tart lépést.

Az importot Ferng két elemből vezeti le: egyrészt fogyasztáshoz közvetlenül felhasznált importból, valamint a termeléshez szükséges importból. A *végso fogyasztáshoz felhasznált közvetlen import* kiszámítása a következő módon áll elő:

$$\langle l \rangle (I - A)^{-1} c_{imp} \approx \begin{bmatrix} 145,55 & 25,87 & 26,48 \\ 6,48 & 21,63 & 11,30 \\ 0,28 & 0,35 & 1,38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55 \\ 25 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1096,48 \\ 110,23 \\ 3,0 \end{bmatrix}.$$

A termelés importigényének, és ezen keresztül a földigény megállapításához a szerző hasonló utat választott, mint Bicknell et al. [1] dolgozatukban, vagyis egy szorzót vezet be. Ezzel a módszerrel a következő eredményre jutunk:

$$\langle l \rangle (I - A)^{-1} A_{imp} (x - exp) \approx \begin{bmatrix} 145,55 & 25,87 & 26,48 \\ 6,48 & 21,63 & 11,30 \\ 0,28 & 0,35 & 1,38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,034 & 0,036 & 0 \\ 0,101 & 0,057 & 0,053 \\ 0 & 0,014 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 123 \\ 120 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1896,4 \\ 594,52 \\ 13,15 \end{bmatrix}.$$

Ezzel a földigényeket kiszámítottuk.

Amint a 2. táblázatban, most is összefoglaljuk a számítások eredményeit a 4. táblázatban.

	Hazai föld	Importált föld	Ökológiai lábnyom
Mezőgazdaság	9711,4	2992,88	12 704,28
Ipar	1348,95	704,75	2053,7
Kereskedelem	79,14	16,15	95,29
Összesen:	11 139,50 (75,00%)	3713,79 (25,00%)	14 853,27

4. táblázat. Ferng [2] számításainak összefoglaló táblázata.

Mielőtt a két lábnyom számítási módszert összevetnénk, fogalmazzunk meg kritikát Ferng módszerével szemben is. Itt is elmondható, hogy az importált termékek és szolgáltatások földigényének meghatározásánál nem az importáló ország földigényét veszi a módszer figyelembe. A másik, de súlyosabb kritikai pont az lehet, hogy ezzel a módszerrel sem lehet szétválasztani egyértelműen, hogy a termelés közvetett importigényéből, és ezen keresztül a földigényéből mennyi tudható be a végső fogyasztásnak és az exportnak. Ezt a hiányosságot orvosoljuk majd a következő fejezetekben.

4. Bicknell et al. [1] és Ferng [2] módszerének összehasonlítása

Mindkét ökológiai lábnyom számítási módszer az input-output modellel jól megragadható jelenségcsoportokat kíván bemutatni, azonban más-más irányból, amire a korábbiakban utaltunk.

A módszerek a következő ökológiai lábnyom tényezőket ragadják meg:

- a végső fogyasztás hazai földigénye,
- az export hazai földigénye,
- a végső fogyasztáshoz közvetlenül felhasznált import külföldi földigénye,
- a termeléshez felhasznált import külföldi földigénye *export nélkül*.

Ebben a felsorolásban mindazon tényezőket felsoroltuk, amelyeket a két vizsgált dolgozat tartalmaz, de van olyan tényező, amely nem szerepel mindkét munkában. Az alábbi táblázatban szerepeltetjük a két dolgozatban megragadott lábnyom kategóriákat, és azok kiszámítási módját mátrixaritmetikai jelöléssel.

	Bicknell et al. [1]	Ferng [2]
A végső fogyasztás hazai földigénye	$l(I - A)^{-1} \langle c \rangle$	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} c$
A végső fogyasztás külföldi földigénye	$l(I - A)^{-1} \langle c_{imp} \rangle$	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} c_{imp}$
A termelés külföldi földigénye	$l(I - A)^{-1} A_{imp} \langle x \rangle$	-
A végső fogyasztás külföldi földigénye	$l(I - A)^{-1} A_{imp} \langle x \rangle \langle c \rangle \langle c + exp \rangle^{-1}$	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} A_{imp} (x - exp)$
Az export hazai földigénye	-	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} exp$

5. táblázat. A két dolgozat által megragadni kívánt kategóriák.

A két módszer tehát a fogyasztáshoz és az exporthoz a termelésen keresztül közvetetten felhasznált import földigényében különbözik élesen. Amíg Bicknell et al. [1] dolgozatukban a termeléshez felhasznált importot ágazatonként a végső felhasználásban szereplő végső fogyasztás és export arányában osztják fel, addig Ferng [2] dolgozatában a teljes kibocsátást csökkenti az exporttal, és nem különbözteti meg, hogy a termeléshez felhasznált import a gazdaságban marad-e, vagy közvetetten fogyasztásra kerül.

Dolgozatunk elsődleges célja, hogy ez utóbbi következtetlenséget vizsgálja, és arra megnyugtató megoldást nyújtson. Ehhez újra csak a lineáris algebra és a mátrixaritmetika eredményeit fogjuk felhasználni.

5. Egy új módszer az ökológiai lábnyom számításához input-output modellel

A lábnyomszámításhoz a következő, 6. táblázatból indulunk ki. A táblázat annyiban különbözik az 3. táblázattól, hogy az importot megosztottuk azon gazdaságok (országok) között, akikkel a vizsgált nemzetgazdaság kereskedelmi kapcsolatban van. Ilyen típusú modellezéseket a regionális közgazdaságtanban lehet találni. Tételezzük fel, hogy az így modellezett nemzetgazdaságban n darab ágazat, szektor van, valamint m másik nemzetgazdasággal van a vizsgált gazdaság kapcsolatban. Amint korábban is, x -szel jelöljük a gazdaság bruttó kibocsátását, c vektor a végső fogyasztás, exp vektor az exportot jelöli, míg X az ágazatközi felhasználás. Az l vektor a gazdaság földterületi igényét mutatja. Az X_{imp_i} mátrix az i -ik gazdaságból importált, és az ágazatokban felhasznált termékeket mutatja, míg a c_{imp_i} vektor az i -ik gazdaságból a nemzetgazdaságunk végső fogyasztásához importált termékeket jelöli. A v és v_c vektorok a hozzáadott értékeket mutatják. Az imp_i vektorok a vizsgált nemzetgazdaságból összesen importált termékeket jelölik, azaz $imp_i = X_{imp_i}1 + c_{imp_i}$, ahol az 1 vektor az összegző vektort jelöli, amelynek minden eleme egy.

	Ágazatok	Végső fogyasztás	Export	Teljes kibocsátás, import	Földterület
Ágazatok	X	c	exp	x	L
1. ország	X_{imp_1}	c_{imp_1}		imp_1	
2. ország	X_{imp_2}	c_{imp_2}		imp_2	
...	
m. ország	X_{imp_m}	c_{imp_m}		imp_m	
Hozzáadott érték	v	v_c			
Teljes kibocsátás	x				

6. táblázat. Egy nemzetgazdaság input-output táblája külkereskedelemmel

Ezek után konstruáljuk meg a modell input együtthatóit a gazdaságba és az importokra is:

$$A = X\langle x \rangle^{-1}, \quad A_{imp_i} = X_{imp_i}\langle x \rangle^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m).$$

Ezekkel az együtthatómátrixokkal a következő egyenleteket nyerhetjük, amelyek leírják a gazdaságot:

$$x = Ax + c + exp,$$

$$imp_i = A_{imp_i}x + c_{imp_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Ezzel az összefüggéssel lényegében megegyezik a 3. táblázat modellje, amennyiben

$$X_{imp} = \sum_{i=1}^m X_{imp_i}, \quad c_{imp} = \sum_{i=1}^m c_{imp_i},$$

vagyis nem csináltunk mást, mint az importot forrásuk szerint válogattuk szét.

Térjünk most rá az ökológiai lábnym megragadásához. Mint látható, a ferengi értelemben vett földszorzót csak a vizsgált nemzetgazdaságra ismerjük a többi gazdaságra nem, mert akkor minden nemzetgazdaság input-output modelljével tisztában kellene lennünk. Ha mégis ismernénk az ottani földszorzókat, akkor azok a következő formát vennék fel:

$$\langle l_i \rangle (I - A_i)^{-1},$$

ahol az A_i mátrix az i -ik nemzetgazdaság ágazati kapcsolati mérlege, és az l_i vektor a gazdaság földigénye. Ennek ismeretében az importokat, amit az általunk vizsgált gazdaság felhasznál, összegezhethjük az 1. ábrán bemutatott rendező modellnek megfelelően:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \langle l_i \rangle (I - A_i)^{-1} imp_i = \\ \sum_{i=1}^m \langle l_i \rangle (I - A_i)^{-1} A_{imp_i} x + \sum_{i=1}^m \langle l_i \rangle (I - A_i)^{-1} c_{imp_i}. \end{aligned}$$

Ez a kifejezés akkor egyezik meg a korábbi modellekkel, ha $A = A_i$, valamint $l = l_i$, vagyis minden gazdaság homogén abban az értelemben, hogy azonos a technológiai mátrixa, és azonos területűek. Ekkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$imp = \sum_{i=1}^m A_{imp_i} x + \sum_{i=1}^m c_{imp_i},$$

ami azt jelenti, hogy összegezzük az importokat, annak származási helyétől függetlenül. A további vizsgálatainkat ezen az aggregált modellen folytatjuk tovább, ahol

$$A_{imp} = \sum_{i=1}^m A_{imp_i}, \quad c_{imp} = \sum_{i=1}^m c_{imp_i}.$$

A vizsgált modell tehát most a következő lesz:

$$x = Ax + c + exp,$$

$$imp = A_{imp}x + c_{imp}.$$

Oldjuk meg ezt a modellt a teljes kibocsátásra:

$$\begin{aligned}x &= (I - A)^{-1}c + (I - A)^{-1}exp, \\imp &= A_{imp}(I - A)^{-1}c + A_{imp}(I - A)^{-1}exp + c_{imp}.\end{aligned}$$

Itt az első egyenletrendszer a hazai termelést írja le, míg a második rendszer az importot mutatja a végső hazai felhasználás, az export és a végső felhasználáshoz közvetlenül importált termékek függvényében. A földigényeket úgy tudjuk meghatározni, hogy a hazai egyenleteket a hazai terület diagonalizált mátrixával szorozzuk, míg az importált termékekre a földszorzót alkalmazzuk. Ezzel a

$$\begin{aligned}\langle l \rangle x &= \langle l \rangle (I - A)^{-1}c + \langle l \rangle (I - A)^{-1}exp, \\ \langle l \rangle (I - A)^{-1}imp &= \langle l \rangle (I - A)^{-1}A_{imp}(I - A)^{-1}c + \\ \langle l \rangle (I - A)^{-1}A_{imp}(I - A)^{-1}exp &+ \langle l \rangle (I - A)^{-1}c_{imp}\end{aligned}$$

kifejezést kapjuk. Így a földigényekre öt összefüggésünk van, amelyek

- $\langle l \rangle (I - A)^{-1}c$: a végső fogyasztás hazai földigénye,
- $\langle l \rangle (I - A)^{-1}exp$: az export hazai földigénye,
- $\langle l \rangle (I - A)^{-1}c_{imp}$: a végső fogyasztáshoz importált termékek földigénye,
- $\langle l \rangle (I - A)^{-1}A_{imp}(I - A)^{-1}c$: a végső fogyasztás előállításához importált termékek földigénye,
- $\langle l \rangle (I - A)^{-1}A_{imp}(I - A)^{-1}exp$: az exportált termékek előállításához importált termékek földigénye.

Ezeknek a kategóriáknak az ismeretében két csoportba sorolhatjuk a földigényeket: (1) hazai felhasználású földigények, amelyek a végső fogyasztáshoz kapcsolódnak, és (2) a külföldi felhasználású földigények, amelyek az exporthoz tapadnak, és így nem jelennek meg a hazai felhasználásban. Ez utóbbi földigényt mint átmenő tételt számíthatjuk, ugyanis importálás után exportban el is hagyja az adott országot, és annak gazdaságát, így az ország földigényébe nem kerül be.

Vessük most össze Bicknell et al. [1] és Ferng [2] eredményeit a most ismertetettel, amit a 7. táblázatban szemléltetünk:

	Bicknell et al. [1]	Ferng [2]	Saját modell
A végső fogyasztás hazai földigénye	$l(l - A)^{-1} \langle c \rangle$	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} c$	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} c$
A végső fogyasztás közvetlen külföldi földigénye	$l(l - A)^{-1} \langle c_{imp} \rangle$	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} c_{imp}$	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} c_{imp}$
A termelés külföldi földigénye	$l(l - A)^{-1} A_{imp} \langle x \rangle$	-	-
A végső fogyasztás külföldi földigénye	$l(I - A)^{-1} A_{imp} \langle x \rangle$ $\langle c \rangle \langle c + exp \rangle^{-1}$	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} A_{imp}$ $(x - exp)$	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} A_{imp}$ $(I - A)^{-1} c$
Az export hazai földigénye	-	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} exp$	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} exp$
Az export külföldi földigénye (nem kerül elszámolásra)	-	-	$\langle l \rangle (I - A)^{-1} A_{imp}$ $(I - A)^{-1} exp$

7. táblázat. A két dolgozat által megragadni kívánt kategóriák.

Azonnal látható, hogy Ferng [2] dolgozatában nem határozta meg az export importigényéhez tapadó földszükségletet, földigényt, ami nagyban megnehezítette a termeléshez felhasznált importtermékek földigényének meghatározását. Mivel

$$x - exp - c = Ax \geq 0,$$

ezért az általunk adott földigény alacsonyabb lesz, mint a Ferng által adott. Ezzel elemzésünket befejeztük, a következő fejezetben a számpéldát követve hasonlítjuk össze az eredményeket.

6. A korábbi és a saját eredmények összevetése a számpéldán keresztül

Az összehasonlításban csak a lábnyomot érintő kategóriákat vonjuk be. Eltekintünk az exporthoz tapadó tényezőktől, mert az nem jelenik meg közvetlenül a lábnyom kiszámításánál.

	A végső fogyasztás hazai földigénye	A végső fogyasztáshoz közvetlenül felhasznált import külföldi földigénye	A termeléshez felhasznált import külföldi földigénye
Bicknell et al. [1]	8777,02 119,63 156,62	1066,17 143,55 0	1479,3 1222,66 239,25
Ferng [2]	9711,4 1348,95 79,14	1096,48 110,23 3	1896,4 594,52 13,15
Javasolt modell	9711,4 1348,95 79,14	1096,48 110,23 3	1542,49 486,96 10,69

Az összes földigény a Bicknell et al. modelljében 15 290,4, Ferngnél 14 853,3 ha, míg a mi modellünkben 14 389,3 ha, ami azt jelenti, hogy még Ferng modelljéhez képest is a különbség 463,9 ha, ami 3,1 százalékkal alacsonyabb a Ferng által adottnál. Ez a különbség most nem tűnik soknak, de más adathalmazhoz sokkal nagyobb különbség is tartozhat.

7. Összefoglalás

A dolgozatban az ökológiai lábnyom meghatározását vizsgáltuk a Leontief-féle input-output modellel. Megmutattuk, hogy az általunk javasolt módszerrel jól leírhatóak a végső fogyasztás és az export ökológiai lábnyomra gyakorolt hatásai.

Eredményünk az, hogy sikerült korrigálnunk a korábbi modellezésben elkövetett apróbb pontatlanságot. Az általunk javasolt módszerrel alacsonyabb lábnyomot számoltunk, ami az eddigi felülbecslést elég jelentősen módosítja.

Megmutattuk azt is, hogy általánosan is lehetne kezelni az importot a lábnyom számításához, azonban ez óriási számítási igénnyel járna, mert minden érintett nemzetgazdaság technikai együttthatóit ismerni kellene. A más szerzők által is tett feltételezés azon alapszik, hogy minden gazdaság területe azonos, és a technológiai feltételei is megegyeznek.

Egy következő elemzésben a bemutatott modellt pl. a magyar gazdaság adataival szembesíthetnénk. Ebben az esetben nem kell feltétlenül az ökológiai lábnyommal számolnunk, hanem az lehet karbonlábnyom is. A modell másik irányú kiterjesztése a lábnyomok dinamizálása, vagyis a felhalmozási-beruházási folyamatok lábnyomra gyakorolt hatásának vizsgálata. Ehhez a Leontief-modell dinamikus változata szolgálhat megfelelő módszernek.

Hivatkozások

- [1] BICKNELL, K. B., BALL, R. J., CULLEN, R., BIGSBY, H. R.: *New methodology for the ecological footprint with an application to the New Zealand economy*, Ecological Economics Vol. **27**, pp. 149-160 (1998).
- [2] FERNG, J.-J.: *Using composition of land multiplier to estimate ecological footprints associated with production activity*, Ecological Economics Vol. **37**, pp. 159-172 (2001).
- [3] LEONTIEF, W.: *Terv és gazdaság*, (Fordította: Bródy András), Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. (1977)
- [4] MILLER, R. E., BLAIR, P. D.: *Input-output analysis: Foundations and extensions*, 2nd ed., Cambridge et al., Cambridge University Press (2009).
- [5] REES, W. E.: *Ecological footprints and appropriated carrying capacity: What urban economics leave out*, Environment and Urbanization, Vol. **4**, pp. 120-130 (1992).

- [6] WACKERNAGEL, M., REES, W. E.: *Our ecological footprint: Reducing human impact on the Earth*, Gabriola Island, BC, New Society Publishers (1996).
- [7] ZALAI ERNŐ: *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó (1989).



Dobos Imre 1986-ban Budapesten a Vízgazdálkodási Intézetben kezdte pályafutását. Itt kezdett el környezeti problémákkal foglalkozni. 1987-től a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem munkatársa lett. A kutatási és oktatási területe a menedzsment és készletezési problémák kvantitatív modellezése lett. 1991-ben publikálta első impaktfaktoros dolgozatát ezen a területen. 1993-tól a Magyar Távközlési Vállalatnál projektmenedzser volt. 1994 és 2000 között német egyetemeken oktatott és kutatott. Frankfurt (Oder) és Bielefeld városok

egyetemein folytatta termelési rendszerek környezeti hatásainak vizsgálatát. Német kollégáival egy sor dolgozatot publikált. 2001-ben hazatért Magyarországra, és a Budapesti Corvinus Egyetemen folytatta pályafutását. Kutatásainak súlypontja továbbra is az ellátási láncok környezeti hatásainak vizsgálata maradt. 2018-ban váltott a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemre. Dobos Imre mint egyetemi tanár 20-nál több impaktfaktoros publikációval rendelkezik, amelyekre több, mint 430 hivatkozása érkezett a Web of Science adatbázisban.

DOBOS IMRE

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar, Közgazdaságtudományok Intézet
1111 Budapest, Magyar tudósok körútja 2., Q épület
dobos@kgt.bme.hu

A NOTE ON THE CALCULATION OF ECOLOGICAL FOOTPRINT WITH INPUT-OUTPUT MODEL

IMRE DOBOS

Calculation of ecological and other type of footprints is a very popular topic in ecological economics. This paper investigates the mathematical background of footprint calculation on the basis of the input-output model developed by Wassily W. Leontief. The goal of the paper is to present former footprint calculations, and to improve these methodologies.

VÁLASZTÓKERÜLETEK ALAKJÁNAK VIZSGÁLATA HU-FÉLE INVARIÁNS MOMENTUMOK ALKALMAZÁSÁVAL

NAGY BALÁZS, SZAKÁL SZILVIA

A *gerrymandering* a választókerületek politikai elfogultság szerinti átrajzolása. Számos mérték létezik síkbeli alakzatok bizonyos tulajdonságainak leírására, ezzel szemben az ideális választókerület formát nehéz lenne meghatározni. Kutatásunkban a Hu-invariáns momentumok segítségével egy új körszerűségi mutatót alkalmazunk néhány amerikai választókerület alakjának és a rendszeresen előforduló változtatások hatásának vizsgálatára, emellett tárgyaljuk az általunk használt alakmutatókkal kapcsolatban felmerülő módszertani kérdéseket is. További célunk egy olyan eljárás kidolgozása, amellyel a manipuláció szándéka hatékonyan kiszűrhető a választókerületek újrarajzolásánál.

1. Bevezetés

Ennek a tanulmánynak alapvetően két célja van. Az egyik, hogy összehasonlítsa néhány amerikai állam választókerületeinek alakját. A másik, hogy bemutassa az alkalmazott alakmutatókat, és tárgyalja az ezekkel kapcsolatos módszertani kérdések egy részét.

A választókerület kialakítása során első lépésként a körzetek méretét, azaz a körzetbe tartozó választók számát, majd határát kell meghatározni. A körzetkiosztási feladat és a körzethatárok megrajzolása is alapvető fontosságú az arányos képviselőket szempontjából. Nem csak a probléma, de az irodalom is két részre tagozódik, az előbbiről áttekintést ad [6], míg az utóbbi témáról az alábbi cikkek értekeznek részletesen: [18], [14]. Vizsgálataink középpontjában a körzethatárok kialakítása áll. A választási körzetek létrehozatalakor az alak önálló kutatási téma, mivel az, hogy a körzetek határait pontosan hol húzzák meg, meghatározó lehet a pártok választási eredményeit illetően, ami közvetve jelentős gazdasági következményekkel is járhat. A politikai hátsó szándékkal történő térképrajzolást, a választókerület-manipulációt a nemzetközi irodalomban *gerrymandering*-nek hívják.

A szakirodalomban számos olyan módszert különböztetnek meg, amellyel egy régió alakja mérhető [21], [9]. Magyarországi megyék vizsgálatát illetően ld. [2].

Mivel egy régió alakjával kapcsolatban több, egymással is összefüggő tulajdonságot lehet vizsgálni, így annak egyetlen mutatóval való pontos leírása nem lehetséges. Egy kétdimenziós területegység formáját tekintve számos különböző szempontot lehet vizsgálni: földrajzi kompaktság (körszerűség), elnyúltság, konvexitás, lyukaság, összefüggőség, a határvonal csipkézettsége. Mivel a téma több tudományterületet is átfog, nincs egységes nyelvezet az alak tulajdonságait illetően. Részben ez az oka annak, hogy a szerzők gyakran szinonimaként alkalmaznak olyan kifejezéseket, mint pl. körszerűség, megnyúlás, konvexitás stb. A korábban felsorolt tulajdonságok közül gyakorlati fontosságuk miatt a körszerűség mutatói a legfontosabbak és a leggyakrabban tárgyaltak, ezért ebben a tanulmányban csak ezeket használjuk. Egy „minden igényt kielégítő” alakmutatónak több kritériumot is teljesítenie kellene, mint például a mérőszám mindenféle mértani alakzatra alkalmazható legyen; minden alakzatot egyetlen számmal jellemezzen; lehetőleg a 0-tól 1-ig terjedő skálán vegye fel az értékeket; a mérőszám nagyságát ne befolyásolja az alakzat elforgatása, eltolása, nagyítása stb.

A választókörzetek kialakításánál számos alakmutatót használnak a körzetek földrajzi „kompaktségének” (tömörségének) mérésére. Ezen mutatók a vizsgált alakzatok kerülete, területe és különféle hosszértékeinek összevetésén alapulnak. A Reock-teszt [15] például a körzet területét viszonyítja a legkisebb olyan kör területéhez, amely a körzetet éppen körbekeríti. A Polsby–Popper-teszt [13] a körzet területét a kerületével azonos kerületű kör területéhez viszonyítja. A Schwartzberg-teszt [17] a körzet határvonalának hosszát a körzet területével azonos területű kör kerületéhez viszonyítja. További mutatók is léteznek, amelyek kétségtelenül hasznosak, azonban ezek közül egy olyan sincs, amit legjobbnak vagy minden szempontból jónak lehetne tartani.

Alapvetően a képfeldolgozásban használt momentumokat alkalmazzuk az objektumok formájának leírására jelen dolgozatunkban. Ismeretes, hogy a különböző rendű momentumokból olyan mennyiségek származtathatók, amelyek – azonkívül, hogy hasznos információt nyújtanak az objektumok alakjáról – invariánsak az eltolásra, nagyításra és forgatásra. A képmomentumok rendszere ilyenformán alkalmas a választókerületek alakjának leírására. Munkánkat jelentősen inspirálták Zunic, Hirota és Rosin [20], [11], [19] dolgozatai, akik bevezették a körszerűség momentum alapú mértékét.

Ebben a cikkben a választókerületek formájának leírására javasoljuk az általuk bevezetett momentum alapú alakmutatót. A legelterjedtebb körszerűségi mutatókhoz képest, amelyek a körzet területét és kerületét is figyelembe veszik, az új mutató jobban működik abban az esetben, amikor a vizsgált választókerület olyan csipkézett határral rendelkezik, amely a kerület nagy növekedéséhez vezet.

Dolgozatunkban a körszerűség momentum alapú mértékét alkalmazzuk négy állam, nevezetesen Arkansas, Iowa, Kansas és Utah kongresszusi választókerületeire. Összehasonlítva a korábban már említett klasszikus mértékekkel, jelentős különbségeket figyelhetünk meg a momentum alapú és a hagyományos alakmutató

értékek között. Úgy találtuk, hogy a momentum alapú mérték hatékony módja annak, hogy azonosítsuk a szabálytalan alakú választási körzeteket. Az alakmutató értékek időbeli változása alapján lehetőség van a gerrymandering gyanús esetek észlelésére is. Az ezzel kapcsolatos eredményeket a 4. fejezet tartalmazza.

Mostani tanulmányunk folytatását illetően a következő kutatási irányt jelöljük ki. Az alakkal kapcsolatos vizsgálatoknál figyelembe kell venni a szabálytalan államhatárokat. További fontos tényező a népesség területegységen belüli eloszlása is, ami felveti az adatok súlyozásának kérdését. Az úgynevezett korrigált körszerűségi mutató figyelembe veszi a lakosság területegységen belüli eloszlását, valamint az államhatárokat is. Jelen dolgozat az ehhez szükséges előkészületeket tartalmazza. Bár az alak jellemzőinek egyetlen mutatóval történő egzakt matematikai leírása nem lehetséges, célunk egy olyan módszer, ill. alakmutató kidolgozása, amely a földrajzi, valamint a népesség-eloszlási jellemzőket is figyelembe véve a lehető legpontosabban jellemzi a választókerületek alakját.

2. Invariáns momentumok

Mivel az új körszerűségi¹ mutató meghatározásához a (geometriai) momentumokat fogjuk használni, az alábbiakban összefoglaljuk az ezekkel kapcsolatos legfontosabb jelöléseket és tényeket. Érdemes megemlíteni, hogy a geometriai momentumokat széles körben használják a számítógépes képelemzési és alakfelismerési feladatokban – lásd [1] [5],[20] és (Chapter 12 [11]).

Egy D alakzat $(p + q)$ -adrendű (geometriai) momentumai folytonos esetben:

$$m_{p,q}(D) = \int \int_D x^p y^q dx dy$$

$(p, q = 0, 1, 2, \dots)$.

A valódi képfeldolgozó alkalmazásokban diszkrét adatokkal dolgoznak, ahol a vizsgált objektumok pixelekből állnak. Ebben az esetben a geometriai momentumok pontos kiszámítása nem lehetséges, ezért gyakorlatban minden egyes $m_{p,q}(D)$ momentumot a diszkrét megfelelőjére cserélünk ki:

$$m_{p,q}(D) = \sum_{(i,j) \in D \cap \mathbb{Z}^2} i^p j^q,$$

ahol \mathbb{Z} az egész számok halmaza.

Egy D alakzat $(p + q)$ -adrendű (képi) momentumai folytonos esetben:

$$m_{p,q}(D) = \int \int_D x^p y^q f(x, y) dx dy,$$

¹A szakirodalomban a körszerűség csak elnevezésbeli egyszerűsítés, valójában körlapszerűségről van szó.

diszkrét esetben pedig

$$m_{p,q}(D) = \sum_{(i,j) \in D \cap \mathbb{Z}^2} i^p j^q f(i, j)$$

$(p, q = 0, 1, 2, \dots)$, ahol $f(x, y)$ a kép világosságfüggvénye. Világosságfüggvényen egy olyan nemnegatív, valós értékű függvényt értünk, amely szakaszosan folytonos, kompakt tartójú, és az egyes változóiban vett improprius integráljai egyenletesen konvergensek.

A világosságfüggvényt 0 és 1 közé normálva egy kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényeként is értelmezhetjük. Mivel különböző rendű momentumokkal a kép világosságának eloszlását tudjuk jellemezni, így a képmomentumok rendszere alkalmas a választókerületek alakjának leírására. Területelemzési vizsgálatok esetén a világosságfüggvénnyel tudjuk megadni a lakosság területegységen belüli eloszlását.

Az origónak a súlypontba való eltolásával olyan momentumok számíthatók, amelyek függetlenek a vizsgált objektum helyétől.

Egy D alakzat $(p+q)$ -adrendű centrális (képi) momentumai folytonos esetben:

$$\mu_{p,q}(D) = \int \int_D (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y) dx dy,$$

diszkrét esetben pedig

$$\mu_{p,q}(D) = \sum_{(i,j) \in D \cap \mathbb{Z}^2} (i - \bar{x})^p (j - \bar{y})^q f(i, j)$$

$(p, q = 0, 1, 2, \dots)$, ahol (\bar{x}, \bar{y}) a kép súlypontja, amely az elsőrendű momentumok normálásával kapható meg:

$$\bar{x} = \frac{m_{1,0}(D)}{m_{0,0}(D)}, \quad \bar{y} = \frac{m_{0,1}(D)}{m_{0,0}(D)}.$$

Centrális momentumok alkalmazása esetén eltolásra invariáns momentumokat kapunk.

Néhány momentumnak fizikai jelentés is tulajdonítható. A nulladrendű momentum $(m_{0,0}(D))$ például a kép összintenzitását reprezentálja. A másodrendű centrális momentumok $(\mu_{2,0}(D)$ és $\mu_{0,2}(D))$ képviselik a kép világosságfüggvényének átlag körüli szórásnégyzetét. Ez utóbbiak különösen fontosak lesznek a vizsgálataink szempontjából.

Normalizált centrális momentumok:

$$\eta_{p,q}(D) = \frac{\mu_{p,q}(D)}{[\mu_{0,0}(D)]^\gamma}, \quad \gamma = 1 + \frac{p+q}{2}.$$

A normalizált centrális momentumok alkalmazásával Hu és munkatársai olyan mennyiségeket konstruáltak, amelyek invariánsak a forgatásra, eltolásra és skálázásra. Ezek az úgynevezett Hu-féle invariáns momentumok [5]. A mi vizsgálataink középpontjában az első invariáns momentum áll, nevezetesen:

$$\phi_1(D) = \eta_{2,0}(D) + \eta_{0,2}(D).$$

3. Körszerűségi mutatók

Sokan a politikai gerrymandering megakadályozásának objektív megelőző eszközének tartják azt, hogy a körzetek „kompaktsága” megfelelő mértékű legyen. Nem meglepő tehát, hogy az alakmutatók egy része a körtől, mint ideális alaktól való eltérés mérésén alapul.

3.1. Megjegyzés. Egy C körszerűségi mutatóval szemben az alábbi, természetes elvárásokat támasztjuk:

- a) $C(D) \in (0, 1]$ bármely D síkbeli alakzatra.
- b) $C(D) = 1$ pontosan akkor, ha D egy kör.
- c) $C(D)$ invariáns az eltolásra, forgatásra és a nagyításra;
- d) Minden $\delta > 0$ esetén létezik olyan D alakzat, amelyre $0 < C(D) < \delta$, azaz léteznek olyan alakzatok, amelyek körszerűségi mértéke tetszőlegesen megközelíti a 0-t.

A szakirodalomban számos olyan alakmutatót alkalmaznak, amellyel a régió körszerűsége mérhető. A mérési eljárások alapján MacEachren [9] a következő négy, egymással némileg átfedésben lévő kategóriába osztotta a javasolt mutatókat: a területegység kerületének és területének összehasonlításán alapuló mutatók; a területegységgel kapcsolatba hozható köröket és egyéb síkidomokat felhasználó mutatók; egy szabályos alakkal való direkt összehasonlításán alapuló mutatók; a területegység alkotóelemeinek eloszlásán alapuló mutatók. A fenti négy kategórián kívül más csoportosítások is lehetségesek, így például Niemi és munkatársai [12] szintén négy (de a fentiekől eltérő), míg Frolov [4] nyolc fő csoportot javasolt a számításban részt vevő adatok típusa alapján. Dolgozatunkban nem ismertetjük az összes lehetséges alakmutatót, de röviden bemutatjuk a leggyakrabban használtakat.

3.1. Klasszikus körszerűségi mutatók

A *Polsby–Popper*-teszt az egyik legelterjedtebb kontúr alapú körszerűségi mutató. A körzet területét a kerületével azonos kerületű kör területéhez viszonyítja:

$$C_{PP}(D) = \frac{4\pi \cdot \text{area}(D)}{[\text{perimeter}(D)]^2}, \quad (1)$$

ahol D egy síkbeli alakzat [13]. Ez az alakmutató a kontúr simaságát is tükrözi. Könnyű ellenőrizni, hogy (1) teljesíti a körszerűségi mutatóval szembeni 3.1. kritériumokat.

Az egyik legismertebb terület alapú alakelemzési módszer a *Reock*-teszt, amely a körzet területének és a köré írható legkisebb kör területének hányadosaként adja meg egy alakzat körszerűségi mértékét:

$$C_R(D) = \frac{\text{area}(D)}{\text{area}(C)},$$

ahol D egy síkbeli alakzat, C a legkisebb olyan kör, amely a körzetet éppen körbekeríti [15].

A körszerűség meghatározására az alak meghatározásának egyik általános megközelítése is alkalmazható. Az egyik ilyen megközelítés a Lee és Salle által bemutatott index. Az index kiszámításához először egymásra helyezzük a D alakzatot és az R szabványos egységet (referenciatartomány) úgy, hogy a közös rész területe maximális legyen. Ezek után a *Lee–Sallee*-indexet a következőképpen határozhatjuk meg [7]:

$$\tau(D) = \frac{\text{area}(D \triangle R)}{\text{area}(D \cup R)}.$$

A gyakorlatban könnyebben kivitelezhető, ha a két alakzatot úgy rendezzük el, hogy azok súlypontja egybeessen. Abban az esetben, amikor az alakzat körszerűségét vizsgáljuk, a referenciatartomány egy kör lesz. Például illesszünk egy C kört egy D alakzatra, ekkor a D alakzat körszerűsége becsülhető C és D összehasonlításával. Tehát egy egyszerű lehetőség, ha az illesztett C kör középpontja egybeesik a D alakzat súlypontjával, és területe megegyezik a D területével. Végül a körszerűségi mutató:

$$C_{LS}(D) = 1 - \frac{\text{area}(D \triangle C)}{\text{area}(D \cup C)} = \frac{\text{area}(D \cap C)}{\text{area}(D \cup C)},$$

ahol D egy síkbeli alakzat, C a referenciakör. Természetesen vannak más változatai is ennek a megközelítésnek.

3.2. Invariáns momentum mint körszerűségi mutató

A továbbiakban feltételezzük, hogy minden vizsgált alakzat kompakt (topológiai értelemben). Nyilvánvaló, hogy ez nem korlátozza a képfeldolgozási feladatokat. Mivel jelen dolgozatban a választókerületek alakját vizsgáljuk, amelyben a lakosság területegységen belüli eloszlása nem játszik szerepet, így a világosságfüggvény a továbbiakban indikátorfüggvénynek tekinthető.

3.1. ÁLLÍTÁS. Legyen D egy kompakt alakzat a síkon. Ekkor

$$\phi_1(D) = \eta_{2,0}(D) + \eta_{0,2}(D) = \frac{\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)}{[\mu_{0,0}(D)]^2} \geq \frac{1}{2\pi},$$

$$\phi_1(D) = \eta_{2,0}(D) + \eta_{0,2}(D) = \frac{\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)}{[\mu_{0,0}(D)]^2} = \frac{1}{2\pi} \iff \text{ha } D \text{ kör.}$$

Következésképpen $\phi_1(D)$ pontosan akkor éri el a minimális értékét, ha D egy kör. Ez a minimum $1/(2\pi)$. Ennek alapján az új körszerúségi mértéket a következőképpen adhatjuk meg [20] alapján.

3.1. Definíció. Tegyük fel, hogy D egy kompakt alakzat a síkon. Ekkor legyen a $C_1(D)$ körszerúségi mutató

$$C_1(D) = \frac{\phi_1(D)}{\phi_1(D)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{[\mu_{0,0}(D)]^2}{\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)},$$

ahol a C kör területe megegyezik a D területével.

Könnyű ellenőrizni, hogy az így definiált körszerúségi mutató kielégíti a 3.1. feltételeket. A normalizált centrális momentumok használatakor skálázásinvariáns jellemzőket kapunk. Ha a skálázási faktor λ , akkor az új centrális momentumok:

$$\mu'_{p,q} = \lambda^{p+q+2} \cdot \mu_{p,q}.$$

Speciálisan,

$$\mu'_{0,0} = \lambda^2 \cdot \mu_{0,0}.$$

Következésképpen,

$$\eta'_{2,0} = \frac{\mu'_{2,0}}{[\mu'_{0,0}]^2} = \frac{\lambda^4 \cdot \mu_{2,0}}{[\lambda^2 \cdot \mu_{0,0}]^2} = \eta_{2,0},$$

$$\eta'_{0,2} = \frac{\mu'_{0,2}}{[\mu'_{0,0}]^2} = \frac{\lambda^4 \cdot \mu_{0,2}}{[\lambda^2 \cdot \mu_{0,0}]^2} = \eta_{0,2},$$

ami igazolja a normalizált centrális momentumok skálázásinvarianciáját.

Az α -szöggel történő forgatás utáni másodrendű momentumok kifejezhetőek az alábbi módon:

$$\mu'_{2,0} = \cos^2(\alpha) \cdot \mu_{2,0} + \sin^2(\alpha) \cdot \mu_{0,2} - \sin(2\alpha) \cdot \mu_{1,1},$$

$$\mu'_{0,2} = \sin^2(\alpha) \cdot \mu_{2,0} + \cos^2(\alpha) \cdot \mu_{0,2} + \sin(2\alpha) \cdot \mu_{1,1}.$$

Tehát

$$\mu'_{2,0} + \mu'_{0,2} = (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) (\mu_{2,0} + \mu_{0,2}) = \mu_{2,0} + \mu_{0,2},$$

azaz

$$\phi'_1 = \phi_1.$$

Mivel a centrális momentumok alkalmazása esetén eltolásra invariáns momentumokat kapunk, a normalizált centrális momentumok alkalmazása biztosítja az invarianciát a tetszőleges pont körüli forgatáshoz. A bizonyítás részleteit illetően ld. [5].

A regionalizációs problémák során gyakran fordul elő, hogy területeket kell egyesíteni vagy épp szétválasztani. Az optimális felosztás meghatározásához segítségünk lehet arra, hogy miként változik egy régió körszerűségi értéke, ha például egy szomszédos tartományt hozzácsatolunk. Erre ad választ a következő állítás.

3.2. ÁLLÍTÁS. Legyen D_1 és D_2 két szomszédos síkbeli alakzat. Jelölje D az ezek egyesítésével létrejövő új tartományt. Ekkor

$$\begin{aligned} \mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D) &= \mu_{2,0}(D_1) + \mu_{0,2}(D_1) + \mu_{2,0}(D_2) + \mu_{0,2}(D_2) \\ &\quad + d_1^2 \cdot \mu_{0,0}(D_1) + d_2^2 \cdot \mu_{0,0}(D_2), \end{aligned}$$

ahol d_1 , illetve d_2 a D_1 , illetve D_2 súlypontjának a D súlypontjától való távolsága.

Bizonyítás. Jelölje (\bar{x}_1, \bar{y}_1) , illetve (\bar{x}_2, \bar{y}_2) a D_1 , illetve D_2 alakzatok súlypontját. A D alakzat súlypontjának koordinátái:

$$\bar{x} = \frac{m_{0,0}(D_1) \cdot \bar{x}_1 + m_{0,0}(D_2) \cdot \bar{x}_2}{m_{0,0}(D_1) + m_{0,0}(D_2)}, \quad \bar{y} = \frac{m_{0,0}(D_1) \cdot \bar{y}_1 + m_{0,0}(D_2) \cdot \bar{y}_2}{m_{0,0}(D_1) + m_{0,0}(D_2)}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D) &= \int \int_D (x - \bar{x})^2 dx dy + \int \int_D (y - \bar{y})^2 dx dy \\ &= \int \int_{D_1} (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 dx dy + \int \int_{D_2} (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 dx dy. \end{aligned}$$

A D_1 tartomány feletti integrálra kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} &\int \int_{D_1} (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 dx dy \\ &= \int \int_{D_1} [(\bar{x}_1 - \bar{x}) + (x - \bar{x}_1)]^2 + [(\bar{y}_1 - \bar{y}) + (y - \bar{y}_1)]^2 dx dy \\ &= \int \int_{D_1} ((\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y})^2) dx dy + \int \int_{D_1} ((x - \bar{x}_1)^2 + (y - \bar{y}_1)^2) dx dy \\ &\quad + 2(\bar{x}_1 - \bar{x}) \int \int_{D_1} (x - \bar{x}_1) dx dy + 2(\bar{y}_1 - \bar{y}) \int \int_{D_1} (y - \bar{y}_1) dx dy \\ &= d_1^2 \cdot \mu_{0,0}(D_1) + \mu_{2,0}(D_1) + \mu_{0,2}(D_1). \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk a következő, egyszerűen belátható azonosságot:

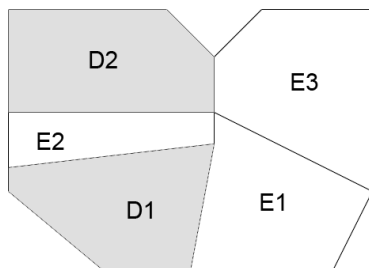
$$\int \int_{D_1} (x - \bar{x}_1) dx dy = \int \int_{D_1} (y - \bar{y}_1) dx dy = 0.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int \int_{D_2} (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 dx dy = d_2^2 \cdot \mu_{0,0}(D_2) + \mu_{2,0}(D_2) + \mu_{0,2}(D_2),$$

ami az állításunk helyességét igazolja. \square

Analóg állítás igaz abban az esetben is, ha geometriai momentumok helyett képi momentumokat alkalmazunk. Konkrét regionalizálási problémánál ez azt jelenti, hogy figyelembe vesszük a lakosság területegységen belüli eloszlását.



1. ábra. Példa regionalizálási problémára

3.1. Példa. Az alábbi egyszerű példán egy regionalizálási problémát szemlélítettünk. A célunk most csak annyi, hogy maximalizáljuk a körszerűségi mutató értékének növekedését. Megvizsgáljuk, hogy miként változik a körszerűségi mutató értéke, amikor egy régióhoz hozzácsatolunk egy egységet. Az 1. ábra két régiót (D_1 és D_2) és három egységet (E_1 , E_2 és E_3) ábrázol, amelyek még nincsenek hozzárendelve egyetlen régióhoz sem. Tegyük fel, hogy a D_1 és D_2 régiók a korábbi feldolgozási fázisok során a jelenlegi állapotukra nőttek. Az 1. táblázat tartalmazza $\mu_{2,0}(\cdot) + \mu_{0,2}(\cdot)$, $\mu_{0,0}(\cdot)$ és $C_1(\cdot)$ értékét az említett tartományokra vonatkozóan. Jelölje d_1 az aktuális régió súlypontjának az egység hozzáadásával keletkező új régió súlypontjától való távolságát. Továbbá, legyen d_2 az egység súlypontjának az egység hozzáadásával keletkező új régió súlypontjától való távolsága. Mivel a D_1 régió és az E_3 egység, valamint a D_2 régió és az E_1 egység nem szomszédosak, így ezeket nem lehet egyesíteni.

Tehát a következő lehetséges opciók jöhetnek szóba:

- I. Az E_1 egységet hozzárendeljük a D_1 régióhoz.
- II. Az E_2 egységet hozzárendeljük a D_1 régióhoz.
- III. Az E_2 egységet hozzárendeljük a D_2 régióhoz.
- IV. Az E_3 egységet hozzárendeljük a D_2 régióhoz.

	$\mu_{2,0}(\cdot) + \mu_{0,2}(\cdot)$	$\mu_{0,0}(\cdot)$	$C_1(\cdot)$
D_1 régió	1, 711	2, 967	0, 819
D_2 régió	1, 948	3, 043	0, 756
E_1 egység	1, 359	2, 761	0, 893
E_2 egység	0, 638	1, 173	0, 343
E_3 egység	1, 869	3, 251	0, 9

1. táblázat. A régiók és egységek az egyesítés előtt.

Opció	d_1	d_2	$\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)$	$C_1(D)$	$\Delta C_1(D)$
I.	0, 9	0, 97	8, 071	0, 647	-0, 172
II.	0, 28	0, 68	3, 124	0, 873	0, 054
III.	0, 26	0, 64	3, 272	0, 865	0, 109
IV.	1, 3	1, 23	13, 878	0, 454	-0, 302

2. táblázat. A lehetséges egyesítési opciók.

Itt D az adott opció végrehajtása után létrejövő új tartományt, $\Delta C(D)$ pedig az egyesítés során bekövetkezett körszerúségiérték-növekedést jelöli. A III. opció végrehajtása során bekövetkezett körszerúségiérték-növekedés 0,109. Most ez a „legjobb” opció az összes többi lehetőséghez képest. Ha a II. opció valósul meg, akkor a D_1 körszerúségi értéke lesz a legmagasabb (0,873), de mivel a körszerúségi együttható értékének legnagyobb növekedését kerestük ahelyett, hogy a legmagasabb körszerúségi értéket figyeljünk, így a III. opció tekinthető a legjobbnak.

Egy mohó algoritmus csak azt nézné, hogy melyik esetben lesz valamely körzet körszerúségi értéke a legnagyobb. A mi célfüggvényünk azonban az egyes régiók körszerúségi együtthatójának összege. Egy regionalizálási feladat célja maximalizálni adott számú régió teljes körszerúségének mértékét. Az általunk alkalmazott módszer, amely az alakzat körszerúségét a momentum invariánsak alapján számolja, számítási szempontból hatékony körszerúségi mérést biztosít. A különböző

alkalmazási igényeknek megfelelően egy regionalizálási probléma további korlátozásokat is tartalmazhat. Ilyen például a fizikai korlát, azaz a régiók határai nem léphetik át a főbb földrajzi jellemzőket, például egy hegységet. A méretkorlátozás megkövetelheti, hogy a keletkező régiók azonos méretűek legyenek, vagy bármely régió nagyobb vagy kisebb legyen, mint egy bizonyos méret. Gyakran meg kell őrizni a politikai határok hierarchiáját is. Korlátozhatjuk az egyes régiók körszerűségi értékének az "ideális" értéktől való eltérését is. Már ebből is látszik, hogy egy tartomány minden igényt kielégítő felosztása rendkívül összetett feladat. Jelen tanulmányban egyelőre néhány kezdeti lépést tettünk meg. Az ilyen irányban történő további kutatásokat a megkezdett vizsgálatok természetes folytatási lehetőségének tartjuk. A témával kapcsolatban ld. még [16], [8].

Előfordulhat, hogy bizonyos helyzetekben szeretnénk megváltoztatni a pontok pozíciójának hatását a mért alakzat körszerűségére. Például szeretnénk, ha az alakzat súlypontjától távol lévő pontok nagyobb hatást gyakorolnának a mért körszerűsége, ily módon csökkentve annak mértékét. Vagy fordítva, csökkenteni szeretnénk a távoli pontok hatását. A módosított módszer mindezt lehetővé teszi számunkra azáltal, hogy figyelembe veszi az alak belsejében lévő pontok relatív pozíciójának hatását a számított körszerűsége. Legyen D egy síkbeli alakzat, amelynek súlypontja egybeesik az origóval. Figyeljük meg, hogy $\eta_{2,0}(D) + \eta_{0,2}(D) = (\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)) / [\mu_{0,0}(D)]^2$ nem más, mint a D alakzat pontjainak átlagos négyzetes távolsága a D súlypontjától. Minden $(x, y) \in D$ pont $x^2 + y^2$ értékkel járul hozzá a $\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)$ értékéhez. Nyilvánvaló, hogy ha egy (x, y) pont közelebb van a D középpontjához, akkor ez a hatás kisebb. Mivel $C_1(D)$ arányos a $(\mu_{2,0}(D) + \mu_{0,2}(D)) / [\mu_{0,0}(D)]^2$ hányados reciprokával, így a D centrumhoz képest kisebb távolsággal rendelkező pontok nagyobb hatást gyakorolnak a D számított körszerűségi mértékére. A következő definíció a $C_1(D)$ körszerűségi mutató egy általánosítását adja meg [20] alapján.

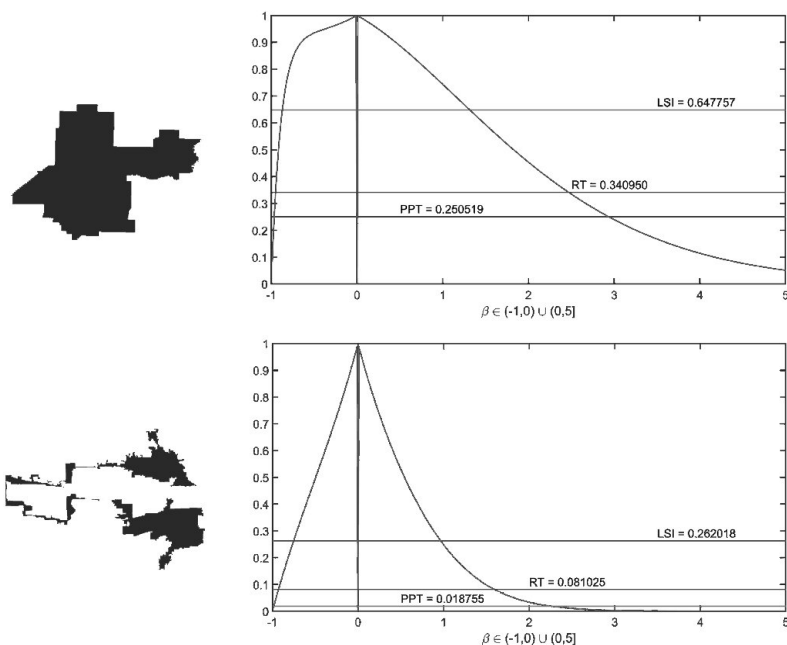
3.2. Definíció. Legyen D egy kompakt síkbeli alakzat, amelynek súlypontja egybeesik az origóval, továbbá β valós szám úgy, hogy $-1 < \beta$, és $\beta \neq 0$. A $C_\beta(D)$ általánosított momentum alapú mértéket az alábbi formulával definiáljuk:

$$C_\beta(D) = \begin{cases} \frac{[\mu_{0,0}(D)]^{\beta+1}}{\pi^\beta(\beta+1) \int \int_D (x^2+y^2)^\beta dx dy}, & \text{ha } \beta > 0, \\ \frac{\pi^\beta(\beta+1) \int \int_D (x^2+y^2)^\beta dx dy}{[\mu_{0,0}(D)]^{\beta+1}}, & \text{ha } \beta \in (-1, 0). \end{cases}$$

A módosított mutató alkalmazásával lehetőségünk lesz befolyásolni azt, hogy a körszerűségi mérték nagyságára mekkora hatást gyakoroljon a határvonal csipkézettsége, amely például sokkal kisebb Arkansas 2/113-as választókerületénél, mint Illinois 4/107-es választókerülete esetén (ld. 2. ábra). Kismértékű deformáció esetén $C_\beta(D)$ értéke enyhén csökken, míg nagymértékű deformáció esetén ez a csökkenés sokkal gyorsabb. Az 2. ábrán látható grafikon jól illusztrálja azt is,

hogy a „tökéletes” körhöz képest nagyon eltérő formájú, szabálytalan formák esetében a nagyon nagy β használata nem ad értelmezhető eredményt, mivel a β növekedésével $C_\beta(D)$ értéke nagyon gyorsan konvergál a nullához. Az említett konvergencia bizonyítását illetően ld. [20].

Az 2. ábrán látható Illinois állam 4-es választókerülete az egyik leghíresebb példa gerrymanderingre. A területéhez képest nagy kerülettel rendelkező alakzat sokkal kevésbé körszerű, mint Arkansas 2-es választókerülete. A Polsby–Popper-teszt ugyan figyelembe veszi a szabálytalan határokat, de ha a határvonal erősen csipkézett, akkor nem ad megbízható eredményt. Az eltérő formák megkülönböztetéséhez különböző β értékek alkalmazása válhat szükségessé. Az ábrán látható, hogy a nevezetes Lee–Sallee-index, Reock- és Polsby–Popper-teszt értékei mind a $\beta \in [1, 3]$ intervallumba esnek. Összességében elmondható, hogy az általunk vizsgált választókerületek esetében 5. fejezet a legjobb választás, ha $\beta \in [1; 3]$, a tapasztalataink szerint a mutatónak itt ideális az érzékenysége az alakzatok csipkézettségére.



2. ábra. Arkansas 2/113-as és Illinois 4/107-es választókerületek általánosított momentum alapú mértékének változása különböző β értékek esetén, összehasonlítva a nevezetes mutatók értékeivel.

4. Az Egyesült Államok néhány választókerületének vizsgálata az általánosított momentum alapú mérték segítségével

Az Amerikai Egyesült Államok 50 tagállamát összesen 435 választókerületre osztották fel, és átlagosan 710 ezer állampolgár tartozik egy kerülethez. Ennek megfelelően 435 képviselői hely található az Egyesült Államok Kongresszusának képviselőházában, amely kétéves ciklusokban ülésezik. A tízévente lebonyolított népszámlálások adatai alapján, az egyes államok választókerületeinek határait átrajzolhatják, esetleg összevonhatnak vagy szétbonthatnak választókerületeket.

Ebben a tanulmányban négy állam választókerületét vizsgáltuk a 107., 108. és 113. kongresszus idején érvényes körzethatárokkal. Ezek az államok, ld. 3. ábra: Arkansas (AR), Iowa (IA), Kansas (KS) és Utah (UT), amelyeknek a lakossága nagyjából hárommillió fő, és a választókerületek száma is hasonló (AR: 4, IA: 5 (4), KS: 4, UT: 3 (4)). A 107. kongresszus 2001. január 3-tól 2003. január 3-ig tartott, ami után, a 108. kongresszusra (2003. január 3. – 2005. január 3.) módosították a vizsgált államok választókerületeinek határát, hasonlóan a 113. kongresszus (2013. január 3. – 2015. január 3.) előtt is újrarajzolták ezeket a határokat, Iowa esetében 5-ről 4-re csökkentve, míg Utah esetében 3-ról 4-re növelve a számukat.

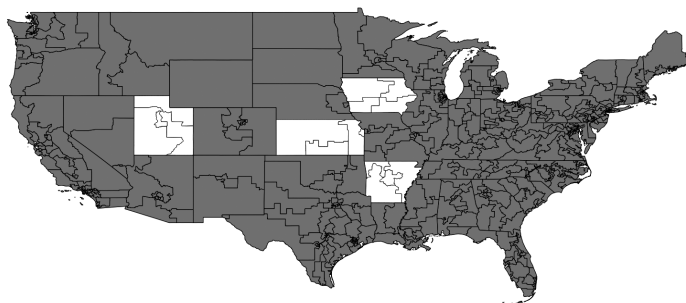
Az Egyesült Államok Legfelsőbb Bírósága deklarálja ², hogy a nevezetes körszerűségi mutatók által meghatározni kívánt *kompaktság* (itt annak a mértéke, hogy egy alakzat pontjai mennyire vannak távol a középpontjától), fontos szempont a választókerületek törvényes kialakításánál, amit ezeknek a kiterjedt szakirodalma is alátámaszt. Mivel a földrajzi kompaktság meghatározása nem pontos, ezért is célszerű több mutató használatát. Sok esetben *prima facie* sejthető, ha egy körzet valamilyen politikai manipuláció eredménye, jó példa erre a 2. ábrán látható Illinois-beli 4-es választókerület. Ezzel szemben az ideális választókerület alakjának meghatározása nem könnyű. Érdeemes megjegyezni, hogy egy adott párt számára optimális választókerület-szabdalás is nehéz probléma [3].

A 3.2.-ben definiált, a tehetetlenségi nyomatékokra épülő és a képfeldolgozásban is gyakran használt, általánosított momentum alapú mértéket még nem használták választókerületeket alakjának elemzésére. Az eredmények szemléletes bemutatását segíti a szerzők által, Leaflet térinformatikai keretrendszerben készített interaktív térkép [10].

4.1. A mutatók kiszámítása

Az előfeldolgozás során a kiválasztott államok választókerületeinek vektorgrafikus térképét szürkeárnyalatos rasztergrafikus képekké alakítottuk a Quantum GIS alkalmazás segítségével. Így az egyes területeket a pixelek intenzitásértékei alapján lehet megkülönböztetni. A rasztergrafikus képek feldolgozásához MATLAB-ot és a hozzá tartozó Image Processing Toolbox-ot használtuk. Például a 4a. képen látható fehér terület a vizsgált választókerület, a fekete az adott állam többi része,

²Act of Jan. 16, 1901, ch. 93, 31 Stat. 733.



3. ábra. Arkansas, Iowa, Kansas és Utah választókerületei a 113. kongresszus idején érvényes körzethatárokkal.

végül a szürke a szomszédos állam területe. A 4b. képen pedig egy referenciaalakzat található, aminek a meghatározásához szükségünk van a vizsgált választókerület súlypontjának koordinátaíra. Ezek a koordináták a centrális momentumok segítségével könnyen meghatározhatók, ld. 2. fejezet. Tanulmányunkban a kör a referenciaalakzat, ezért a súlypontból, egy sugár mentén kiindulva addig növelünk egy körlapot, amíg ennek területe el nem éri a vizsgált választókerület területét. Ezután a Hu-féle invariáns momentumok már könnyen kiszámíthatók, amik segítségével adódik az általánosított momentum alapú mérték. A nevezetes mutatók kiszámításához csupán az alakzatok területére és kerületére volt szükség.

A probléma általánosításánál, megfelelő adatok birtokában, a pixelek intenzitását feleltethetjük majd meg a népesség eloszlásának, és megvizsgálunk olyan összetettebb referenciaalakzatot is, ami figyelembe veszi az államhatárokat és egyéb földrajzi jellemzőket.



(a) Az algoritmus bemenete



(b) A referenciaalakzat

4. ábra. Az AR01/108 választókerület.

4.2. Eredmények

4.2.1. Az általánosított momentum alapú mérték változása a β paraméter függvényében

Tanulmányunkban a 3.2. definícióban leírt általánosított momentum alapú mértékkel vizsgáltuk a választókerületek alakját. Ennek a mutatónak fontos tulajdonsága, hogy invariáns az eltolásra, forgatásra, skálázásra és figyelembe veszi az alakzat kerületét, sőt a csipkézettségre való érzékenység beállítható a β paraméter segítségével, ld. 2. ábra. További előnye a gyors kiszámolhatósága, szemben más kerület alapú mutatókkal. Vizsgálataink során, három nevezetes mutató értékét is meghatároztuk a kiválasztott államok választókerületein. A Polsby–Popper-tesztet, a Reock-tesztet és a Lee–Sallee-indexet összehasonlítottuk az általánosított momentum alapú mértékkel a $\beta = -0,5; 1; 2; 8$ értékekre.

Ahogy az 5. fejezetben található táblázatokban és az interaktív térképen is látható, a $\beta = -0,5$ paraméterrel a mutató túlságosan érzéketlen a csipkézettségre, míg $\beta = 8$ esetén nagyon érzékennyé válik. Például az 5. ábrán látható két választókerület és a táblázatban található értékek azt mutatják, hogy az általánosított momentum alapú mérték hogyan függ β -tól. Megfigyelhető az is, hogy az 5a. ábrán látható alakzaton a mutató értéke valamivel érzékenyebben változik a β növelésével, mint az 5b.-ben találhatón, mivel ennek határa kevésbé csipkézett.

A vizsgálataink alapján, az általánosított momentum alapú mértéket 1 és 3 közötti β értékkel célszerű használni a választókerületek alakjának elemzésére.

β	$C_\beta(AR02/107)$	$C_\beta(KS04/107)$
-0,5	0,9235	0,9226
1	0,6401	0,6550
2	0,3013	0,3321
8	0,0008	0,0014



(a) Az AR02/113 választókerület



(b) A KS04/107 választókerület

5. ábra. Két választókerület körszerűségének összehasonlítása.

4.2.2. Az általánosított momentum alapú mérték változása a választókerület határának átrajzolásai után

Az időszakok közötti változás vizsgálatához érdemes az államok választókerületeinek átlagát nézni a különböző mértékek szerint. A 4.2.1. alfejezettel összhangban, az általánosított momentum alapú mértéknél a $\beta = 2$ paraméterű mértéket érdemes vizsgálni. Az 5. fejezetben található eredmények alapján, általánosságban elmondható, hogy Arkansas és Utah esetében az összes mutató szerint a 113. időszaki értékek a legrosszabbak. Az általánosított momentum alapú mérték szerint Kansas és Iowa államoknál is ez az időszak a legkedvezőtlenebb. Iowaban és Utahban pedig egyértelműen a 107. időszak volt a legjobb. Kansas esetében, a kis változtatások miatt, a különböző mértékek szerint nagyon eltérő sorrendek alakulnak ki az időszakok között.

A 6. ábrán látható Arkansas állam 3. választókerülete a 107., 108. és 113. kongresszus idején érvényes körzethatárokkal. Megfigyelhető, hogy a 107. és a 108. között javult, majd a 113. időszakra jelentősen romlott a választókerület körszerűsége, és szemmel is látható, hogy az utolsó időszaki határmódosítás gyanút adhat gerrymanderingre.

β	$C_\beta(AR03/107)$	$C_\beta(AR03/108)$	$C_\beta(AR03/113)$
-0,5	0,9404	0,9509	0,5324
1	0,6977	0,7931	0,4008
2	0,3648	0,5351	0,1618
8	0,0012	0,0120	0,0003



(a) AR03/107



(b) AR03/108



(c) AR03/113

6. ábra. Az AR03/03 választókerület a 107., 108. és 113. kongresszus idején érvényes határokkal.

5. Melléklet

Választókerületek	β	C_β 107	C_β 108	C_β 113	LSI 107	LSI 108	LSI 113	RT 107	RT 108	RT 113	PPT 107	PPT 108	PPT 113
1.	-0,5	0,9361	0,9308	0,9059									
	1,00	0,8100	0,8035	0,7159									
	2,00	0,5841	0,5831	0,4115	0,7206	0,7005	0,6316	0,3955	0,4310	0,3003	0,1436	0,1426	0,1051
	8,00	0,0096	0,0168	0,0008									
2.	-0,5	0,9235	0,9235	0,9346									
	1,00	0,6401	0,6403	0,7433									
	2,00	0,3013	0,3016	0,4536	0,5816	0,5819	0,6478	0,3107	0,3106	0,3410	0,2207	0,2212	0,2505
	8,00	0,0008	0,0008	0,0036									
3.	-0,5	0,9404	0,9509	0,5324									
	1,00	0,6977	0,7931	0,4008									
	2,00	0,3648	0,5351	0,1618	0,6192	0,6569	0,2745	0,3281	0,4406	0,2812	0,3266	0,3200	0,1291
	8,00	0,0012	0,0120	0,0003									
4.	-0,5	0,9468	0,9379	0,9307									
	1,00	0,7531	0,7210	0,7215									
	2,00	0,4743	0,4360	0,4361	0,6165	0,5736	0,6293	0,3938	0,3918	0,3855	0,2605	0,2151	0,2685
	8,00	0,0079	0,0065	0,0047									
Átlag	-0,5	0,9367	0,9358	0,8259									
	1,00	0,7252	0,7395	0,6454									
	2,00	0,4311	0,4639	0,3657	0,6345	0,6282	0,5458	0,3570	0,3935	0,3270	0,2378	0,2247	0,1883
	8,00	0,0049	0,0090	0,0024									

3. táblázat. Arkansas

Választókerületek	β	C_{β} 107	C_{β} 108	C_{β} 113	LSI 107	LSI 108	LSI 113	RT 107	RT 108	RT 113	PPT 107	PPT 108	PPT 113
1.	-0,5	0,9437	0,8572	0,8652									
	1,00	0,7900	0,5281	0,5025	0,6552	0,5103	0,4616	0,3882	0,2024	0,2330	0,4031	0,2619	0,2725
	2,00	0,5271	0,1886	0,1855									
	8,00	0,0069	0,0000	0,0001									
2.	-0,5	0,8945	0,9284	0,9189									
	1,00	0,5035	0,7712	0,6594	0,4834	0,6491	0,5410	0,2084	0,4806	0,3716	0,2547	0,3493	0,4024
	2,00	0,1700	0,5335	0,3493									
	8,00	0,0000	0,0193	0,0027									
3.	-0,5	0,8810	0,9266	0,9380									
	1,00	0,5438	0,6827	0,6990	0,4450	0,5564	0,5797	0,2544	0,3404	0,2983	0,3023	0,3218	0,3649
	2,00	0,2240	0,3802	0,3836									
	8,00	0,0001	0,0024	0,0010									
4.	-0,5	0,9477	0,9199	0,9354									
	1,00	0,7582	0,6100	0,7090	0,6095	0,5464	0,6186	0,4280	0,2179	0,3108	0,4680	0,3844	0,2379
	2,00	0,4825	0,2497	0,3930									
	8,00	0,0090	0,0000	0,0012									
5. ^a	-0,5	0,9454	0,8387										
	1,00	0,7285	0,4792		0,6540	0,4269		0,2725	0,2378		0,3231	0,3027	
	2,00	0,3986	0,1728										
	8,00	0,0007	0,0001										
Átlag	-0,5	0,9167	0,9080	0,9144									
	1,00	0,6489	0,6480	0,6425	0,5694	0,5378	0,5502	0,3103	0,2959	0,3034	0,3503	0,3040	0,3195
	2,00	0,3509	0,3380	0,3279									
	8,00	0,0040	0,0054	0,0013									

4. táblázat. Iowa

^a2013 óta ebben az államban már csak 4 választókerület van.

Választókerületek	β	C_{β} 107	C_{β} 108	C_{β} 113	LSI 107	LSI 108	LSI 113	RT 107	RT 108	RT 113	PPT 107	PPT 108	PPT 113
1.	-0,5	0,9499	0,9466	0,9055									
	1,00	0,7337	0,7195	0,6336									
	2,00	0,4302	0,4134	0,3310	0,5990	0,5834	0,5124	0,3867	0,3321	0,3694	0,4312	0,3858	0,3987
	8,00	0,0033	0,0029	0,0018									
2.	-0,5	0,8539	0,8955	0,9010									
	1,00	0,5766	0,6279	0,6088									
	2,00	0,2976	0,3372	0,3051	0,4388	0,4892	0,4819	0,3549	0,3777	0,3322	0,2300	0,2440	0,3362
	8,00	0,0024	0,0032	0,0018									
3.	-0,5	0,9101	0,8760	0,9181									
	1,00	0,7425	0,6781	0,8147									
	2,00	0,4722	0,3756	0,5829	0,6194	0,6102	0,6973	0,3893	0,3330	0,4397	0,3550	0,2861	0,4440
	8,00	0,0048	0,0014	0,0153									
4.	-0,5	0,9226	0,9196	0,8321									
	1,00	0,6550	0,6367	0,4734									
	2,00	0,3321	0,3058	0,1858	0,5486	0,5445	0,3775	0,3455	0,3149	0,3198	0,4673	0,4490	0,3759
	8,00	0,0014	0,0008	0,0004									
Átlag	-0,5	0,9091	0,9094	0,8892									
	1,00	0,6770	0,6655	0,6326									
	2,00	0,3830	0,3580	0,3512	0,5514	0,5568	0,5173	0,3691	0,3394	0,3653	0,3709	0,3412	0,3887
	8,00	0,0030	0,0021	0,0048									

5. táblázat. Kansas

Választókerületek	β	C_{β} 107	C_{β} 108	C_{β} 113	LSI 107	LSI 108	LSI 113	RT 107	RT 108	RT 113	PPT 107	PPT 108	PPT 113
1.	-0,5	0,9191	0,9460	0,7561									
	1,00	0,6290	0,7789	0,3481	0,5058	0,6833	0,2918	0,3386	0,2803	0,2164	0,3196	0,3550	0,2665
	2,00	0,3124	0,4952	0,1002									
	8,00	0,0013	0,0009	0,0000									
2.	-0,5	0,9703	0,9070	0,9500									
	1,00	0,8774	0,6774	0,7945	0,7474	0,5350	0,6470	0,4823	0,3989	0,4708	0,3471	0,3023	0,3375
	2,00	0,6986	0,4025	0,5576									
	8,00	0,0502	0,0074	0,0238									
3.	-0,5	0,8964	0,9043	0,8495									
	1,00	0,8052	0,6489	0,5624	0,7004	0,5681	0,5058	0,5134	0,3109	0,2586	0,3335	0,3034	0,1936
	2,00	0,5866	0,3369	0,2477									
	8,00	0,0297	0,0010	0,0002									
4.^a	-0,5			0,8350									
	1,00			0,5758			0,4898						
	2,00			0,2757						0,3131			0,2200
	8,00			0,0006									
Átlag	-0,5	0,9286	0,9191	0,8477									
	1,00	0,7705	0,7017	0,5702	0,6512	0,5954	0,4836	0,4448	0,3300	0,3147	0,3334	0,3202	0,2544
	2,00	0,5326	0,4115	0,2953									
	8,00	0,0271	0,0031	0,0062									

6. táblázat. Útah

^a2013 óta ebben az államban már 4 választókerület van.

Köszönetnyilvánítás

Köszönjük Tasnádi Attilának a téma felvetését és a szakmai segítséget! A dolgozat elkészítéséhez anyagi támogatást nyújtott az OTKA K-112975 pályázat.

Hivatkozások

- [1] CSETVERIKOV, D.: *Digitális képelemzés alapvető algoritmusai*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar (2014).
- [2] DUSEK, T.: *A megyék és régiók összehasonlítása alakmutatókkal*, Területi Statisztika, Vol. **55** No. **2**, pp. 142-156 (2015).
- [3] FLEINER, B., NAGY, B., AND TASNÁDI, A.: *Optimal partisan districting on planar geographies*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **25** No. **4**, pp. 879-888 (2017).
- [4] FROLOV, Y. S.: *Measuring the Shape of Geographical Phenomena: A History of the Issue*, Soviet Geography, Vol. **16** No. **10**, pp. 676-687 (1975).
- [5] HU, M. K.: *Visual Pattern Recognition by Moment Invariants*, IRE Trans. Information Theory, Vol. **8**, pp. 179-187 (1962).
- [6] KÓCZY, L., BIRÓ, P., AND SZIKLAI, B.: *US vs. European Apportionment Practices: The Conflict between Monotonicity and Proportionality*, Trends in Computational Social Choice, pp. 309-325.
- [7] LEE, D. R. AND SALLEE, G. T.: *A Method of Measuring Shape*, Geographical Review, Vol. **60** No. **4**, pp. 555-563 (1970).
- [8] LI, W., GOODCHILD, M. F., AND CHURCH, R.: *An efficient measure of compactness for two-dimensional shapes and its application in regionalization problems*, International Journal of Geographical Information Science, Vol. **27** No. **6**, pp. 1227-1250 (2013).
- [9] MACEACHREN, A. M.: *Compactness of Geographic Shape: Comparison and Evaluation of Measures*, Geografiska Annaler. Series B, Human Geography, Vol. **67** No. **1**, pp. 53-67 (1985).
- [10] NAGY, B. AND SZAKÁL, S.: *Körszerűségi mutatók - Arkansas, Iowa, Kansas és Utah választókerületei*, Leaflet, URL <http://web.uni-corvinus.hu/~bnagy3/research/circ/map/>.
- [11] NAYAK, A. AND STOJMENOVIC, I.: *Handbook of Applied Algorithms: Solving Scientific, Engineering, and Practical Problems*, Wiley-IEEE, Wiley (2007).
- [12] NIEMI, R. G., GROFMAN, B., CARLUCCI, C., AND HOFELLER, T.: *Measuring Compactness and the Role of a Compactness Standard in a Test for Partisan and Racial Gerrymandering*, The Journal of Politics, Vol. **52** No. **4**, pp. 1155-1181 (1990).
- [13] POLSBY, D. D. AND POPPER, R. D.: *The Third Criterion: Compactness as a Procedural Safeguard against Partisan Gerrymandering*, Yale Law & Policy Review, Vol. **9** No. **2**, pp. 301-353 (1991).

- [14] PUPPE, C. AND TASNÁDI, A.: *Axiomatic Districting*, Social Choice and Welfare, Vol. **44**, pp. 31-50 (2015).
- [15] REOCK, E. C.: *A Note: Measuring Compactness as a Requirement of Legislative Apportionment*, Midwest Journal of Political Science, Vol. **5** No. **1**, pp. 70-74 (1961).
- [16] RICCA, F. AND SIMEONE, B.: *Local search algorithms for political districting*, European Journal of Operational Research, Vol. **189** No. **3**, pp. 1409-1426 (2008).
- [17] SCHWARTZBERG, J.: *Reapportionment, gerrymandering, and the notion of compactness*, Minnesota Law Review, Vol. **50**, pp. 443-457 (1966).
- [18] TASNÁDI, A.: *The political districting problem: A survey*, Society and Economy, Vol. **33**, pp. 543-554 (2011).
- [19] ŽUNIĆ, J.: *Shape Descriptors for Image Analysis*, Zbornik Radova MI-SANU, Vol. **15**, pp. 5-38 (2012).
- [20] ŽUNIĆ, J., HIROTA, K., AND ROSIN, P. L.: *A Hu moment invariant as a shape circularity measure*, Pattern Recognition, Vol. **43** No. **1**, pp. 47-57 (2010).
- [21] YOUNG, H. P.: *Measuring the Compactness of Legislative Districts*, Legislative Studies Quarterly, Vol. **13** No. **1**, pp. 105-115 (1988).



Nagy Balázs 1986-ban született Budapesten. Egyetemi tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetemen alkalmazott matematikus szakon végezte, amivel párhuzamosan a Budapesti Corvinus Egyetemen szerzett alapszakos alkalmazott közgazdaságtan diplomát. 2012-ben kezdte meg tanulmányait a Budapesti Corvinus Egyetem Gazdaságinformatika Doktori Iskolájában, ahol 2015-ben abszolvált.

2013-tól 2015-ig a Tasnádi Attila vezette MTA-BCE "Lendület" Stratégiai Interakciók Kutatócsoport tagja. 2015-től 2019-ig a BCE Matematika Tanszék tudományos segédmunkatársa.

2011-től folyamatosan részt vesz ipari kutatási-fejlesztési projekteketben.

NAGY BALÁZS

Budapesti Corvinus Egyetem
Matematika Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 8.
balazs.nagy3@uni-corvinus.hu

Szakál Szilvia, egyetemi adjunktus, 1999-ben szerzett matematika tanári diplomát a Kossuth Lajos Tudományegyetemen. Végzése alkalmából a KLTE TTK Kari Tanácsa KLTE TTK Emlékérem kitüntetésben részesítette. 1999-től kezdődően a Debreceni Egyetem Természettudományi Karának matematika PhD képzésén folytatta tanulmányait. 2000-ben elnyerte a Bolyai János Matematikai Társulat "Patai László Alapítvány" díját. PhD-fokozatát a Debreceni Egyetemen szerezte 2013-ban. Tanított a Debreceni Egyetem Matematikai és Informatikai Intézetében, jelenleg pedig a Budapesti Corvinus Egyetem és a Budapesti Gazdasági Egyetem oktatója.

Kutatási területe a differenciálgeometria és alkalmazásai. Szűkebb érdeklődési területe a választási rendszerek matematikája, azon belül a választókerület-szabdalás.

SZAKÁL SZILVIA

Budapesti Corvinus Egyetem
Matematika Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 8.
szakalsz@uni-corvinus.hu

USING HU MOMENT INVARIANTS FOR ANALYZING SHAPE OF CONGRESSIONAL DISTRICTS

BALÁZS NAGY, SZILVIA SZAKÁL

Shape analysis has a special importance in the detection of manipulated redistricting, i.e. gerrymandering. A novel circularity measure based on Hu moment invariants is proposed, whose sensitivity to lacerated borders is adjustable. This paper also examines the shape of Arkansas, Iowa, Kansas, and Utah after redistricting through multiple US Congresses. Our aim is to create a practical method that can efficiently identify gerrymandering.

Keywords: redistricting, gerrymandering, circularity measure, US congressional districts

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtítkára
Szedte és tördelte: Moczár Károly

Nyomta a Coradix Kft., Budapest
Felelős vezető: Szűcs Ernőné

Budapest, 2019
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
100 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a \LaTeX -ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni:

Fejléc: A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét és a szerző teljes nevét.

Kivonat: A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni.

Fejezetek: A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell megnevezni.

A dolgozatban előforduló képleteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni, csak azokat, amelyekre a szerző a dolgozatban hivatkozni kíván.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket szintén folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén ábraazonosító sorszámmal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozatban belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az esetleges definíciókat és tételeket (segédteteleket és lemmákat) szakaszonként újrakezdődő, ponttal elválasztott, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki.

Irodalomjegyzék: A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [2] vagy [1, 7–13].

Az irodalmi hivatkozások formája a következő: Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] FARKAS, J.: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik Vol. **124**, pp. 1-27 (1902).

[2] ZOUTENDIJK, G.: *Methods of Feasible Directions*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, p. 120 (1960).

Szerző adatai: Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (esetleg lakása) pontos címét, illetve e-mail címét.

Idegen nyelvű kivonat: Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol nyelvű összefoglalót.

A szerzők a dolgozatukról 20 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Ágoston Kolos Csaba, Bíró Péter</i> , Egészértékű programozás használata közös kvótás egyetemi felvételi feladatokra	3
<i>Bíró Péter</i> , Vesechereprogramok matematikája	15
<i>Király Tamás, Mészáros-Karkus Zsuzsa</i> , Erősen népszerű párosítás keresése bizonyos páros preferenciarendszerekben	25
<i>Fleiner Tamás, Romsics Erzsébet</i> , Igazságos tortaosztási algoritmusok egyenlő és nemegyenlő felosztási arányokon	33
<i>Forgó Ferenc</i> , Kétkiszolgálós, nem növekvő, egyszerű, lineáris torlódási játékok puha korrelált egyensúlyának kényszerítési értékéről	51
<i>Petróczy Dóra Gréta, Rogers Mark Francis, Kóczy Á. László</i> , Tagkilépések és a magyar befolyás változása az Európai Unió Tanácsában	65
<i>Radványi Anna Ráhel</i> , Kooperatív sztenderd fixfa játékok és alkalmazásuk a vízgazdálkodásban	83
<i>Solymosi Tamás</i> , Alkuhalmazok és a mag egybeesése	107
<i>Csató László</i> , A logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének karakterizációi	131
<i>Dobos Imre</i> , Megjegyzés az ökológiai lábnyom input-output modellel való számításához ...	145
<i>Nagy Balázs, Szakál Szilvia</i> , Választókerületek alakjának vizsgálata Hu-féle invariáns momentumok alkalmazásával	161

INDEX

<i>Kolos Csaba Ágoston, Péter Bíró</i> , Integer programming techniques for college admission problem with common quotas	3
<i>Péter Bíró</i> , Mathematics of kidney exchange programmes	15
<i>Tamás Király, Zsuzsa Mészáros-Karkus</i> , Finding strongly popular matchings in certain bipartite preference systems	25
<i>Tamás Fleiner, Erzsébet Romsics</i> , Algorithms for cake cutting with equal and unequal shares	33
<i>Ferenc Forgó</i> , On the enforcement value of soft correlated equilibrium for two-facility, non-increasing, simple linear congestion games	51
<i>Dóra Gréta Petróczy, Mark Francis Rogers, László Á. Kóczy</i> , European Union's power distribution after a withdrawal	65
<i>Anna Ráhel Radványi</i> , Standard fixed tree game and its applications to water management problems	83
<i>Tamás Solymosi</i> , Coincidence of bargaining sets and the core	107
<i>László Csató</i> , Characterizations of the logarithmic least squares method	131
<i>Imre Dobos</i> , A note on the calculation of ecological footprint with input-output model	145
<i>Balázs Nagy, Szilvia Szakál</i> , Using Hu moment invariants for analyzing shape of congressional districts	161